POTENZA

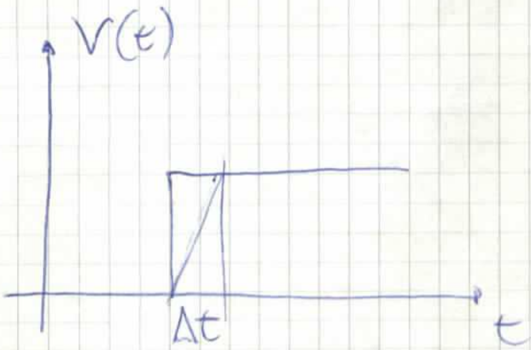
$L_{AB} = 10\,J$

Si va ad analizzare il tempo che serve per compiere quel lavoro

$$\langle P \rangle_{AB} = \frac{L_{AB}}{\Delta t}$$ potenza media

$$\frac{dL}{dt} = P(t)$$ POTENZA ISTANTANEA

$$P(t) = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$



$$L = k_f - \cancel{k_{iniziale}} = k_f$$

$$\langle P \rangle = \frac{L}{\Delta t} = \frac{k_f}{\Delta t}\left[\frac{J}{s}\right] = \frac{k_f}{\Delta t}\,[W]$$

se $\Delta t \to 0$ $\quad \langle P \rangle \to P(t) \Rightarrow \infty$

~~[illegible]~~ Ricordando che per scattare da 0 a v [illegible] non è quello il motivo pratico per il quale 133

non è possibile incontrare tratti discontinui nella curva tempo e velocità, ma il fatto che si dovrebbe ottenere una potenza infinita e le macchine moderne non sono tutt'ora in grado di fornirla.
E' invece possibile ottenere tratti discontinui nella curva che lega accelerazione e tempo perché: $a = \frac{f}{m}$ e quindi se $a = k$ per un certo tempo τ e in quell'istante la forza viene meno l'accelerazione va istantaneamente a 0.

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

$$\begin{cases} \vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}\, dt \\ \vec{I}_{12} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1 \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}_\Omega &= \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{q} \\ \vec{\mathcal{M}}_\Omega &= \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} \end{aligned}\right\} \quad \vec{v}_\Omega = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_\Omega}$$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad L_{AB} = K_B - K_A \qquad K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$L_{AB} = U_A - U_B$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B \Rightarrow \underbrace{U + K}_{\text{funzioni}} = \overbrace{E}^{\text{costante}}$$

$$U(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec{f} \cdot d\vec{s} + U(P_0)$$

$$\vec{f} = -\text{grad}(U)$$

Il gradiente è un operatore che trasforma una funzione scalare in una vettoriale

$$L^{n.con} = E_B - E_A$$

FORZA PESO : $\vec{f}_p = \underset{\text{massa inerziale}}{m}\vec{g}$ una volta deciso che la massa inerziale è uguale a quella gravitazionale

FORZA GRAVITAZIONALE :

$$\vec{f} = -G \frac{M_T m}{r^2}\hat{r}$$

forza reciproca (un oggetto cadendo attira a sé la Terra)

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{Kg^2}$$

KAVENDISH

Costante universale: vale per qualsiasi massa gravitazionale

$g = 9,8 \, m/s^2$

forza gravitazionale

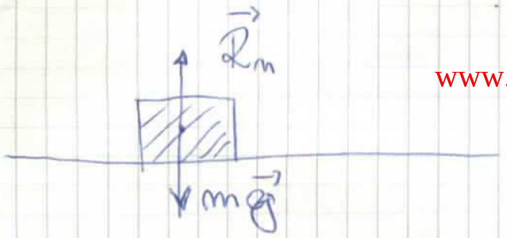
$$f = + \frac{G M_T}{R_T^2} m \qquad f = mg$$

$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \, m$

$$g = \frac{G M_T}{R_T^2} \Rightarrow M_T = \frac{g}{G} R_T^2 = 6 \cdot 10^{24} \, Kg$$

individuazione della massa della Terra, conoscendo il suo raggio

ATTRITO

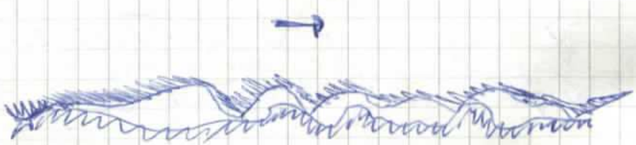


A livello macroscopico è vero che le due forze sono uguali ed opposte.

A livello microscopico, il "libro" potrebbe vibrare con oscillazioni di ampiezza molto piccola (impercettibile).

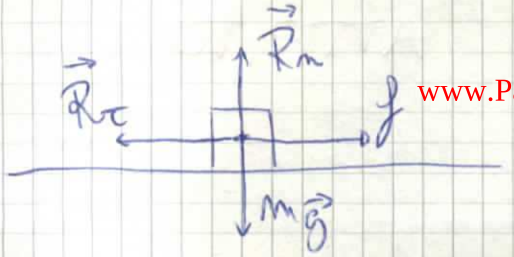
Il fatto che la reazione sia solo normale è dovuta ~~sol~~ al fatto che il piano è liscio (se spingo in direzione tg.te il piano non oppone resistenza)

Ingrandimento del piano e del libro;

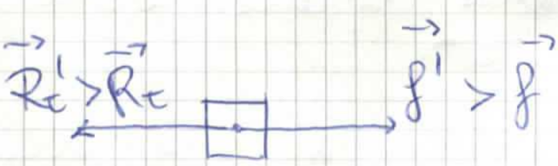


Situazione reale.

Se proviamo a muovere il libro occorre, per muoverlo veramente superare un valore minimo.
Potremmo avere una reazione opposta al verso nel quale spingo.
La reazione del piano ha un'intensità che dipende dalla pressione e quindi dalla forza peso (aumentano i pt. di contatto)

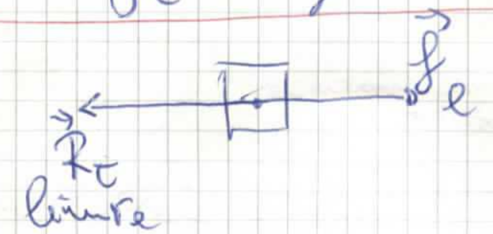


$\vec{R}_t$: Reazione tg.te al piano (uguale ed opposta ad f che non riesce a muovere il libro), attrito



R'_t: il piano reagisce con un valore di reazione maggiore.

fino ad f_e: forza limite oltre la quale il pto materiale si mette in moto.



Abbiamo una reazione tangenziale massima

se $\vec{f} \le \vec{f}_{limite} \Rightarrow$ il corpo rimane fermo

CONDIZIONI STATICHE

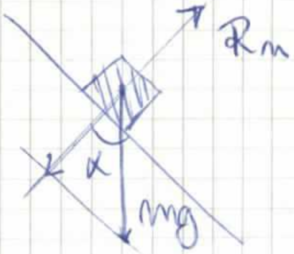
$\vec{f}_{limite}$ dipende da come è fatto il piano e da come è fatto il libro e dalla forza con cui il libro preme sul piano.

$f_{limite} = \mu_s mg$

Tiene conto della natura dei corpi.

$f_e = \mu_s mg$ solo se il piano è orizzontale

FORZA D'ATTRITO: Reazione tangenziale



In questo caso: $f_{lim} = \mu_s mg \cos\alpha$

La reazione normale è sempre uguale ed opposta alla componente normale della forza peso

Sono in condizioni statiche se:

$$\boxed{f \le \mu_s R_n}$$

μ_s = COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO

Superato il valore limite il coefficiente di attrito statico non è più sufficiente a descrivere la reazione del piano (quella tangenziale)
La resistenza al moto cambia in condizioni dinamiche: (lavoriamo sempre con grandezze di tipo macroscopico);

$R_t = \mu_d R_n$

μ_d: coefficiente di attrito dinamico

legge empirica (hanno una validità limitata a particolari applicazioni).

$\vec{R}_t = -\mu_d R_n \hat{v}$

$\vec{R}_t = -b\vec{v}$ ← attrito viscoso (macchine in corsa)

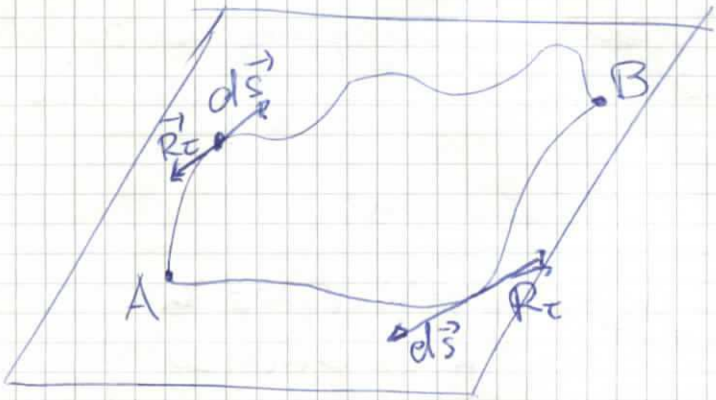
[illegible] della velocità

[illegible] za della velocità

$\vec{R}_t = -b\,v^2\,\hat{v}$ altra legge empirica

L'attrito è di origine elettromagnetica (come anche le reazioni vincolari)

Le forze d'attrito non sono conservative?



Si vuole valutare il lavoro compiuto dalla forza d'attrito (sempre contrario al moto) sempre opposta allo spostamento elementare.

L'attrito e lo spostamento sono sempre a 180°: perché $\underbrace{R_t = -d\vec{s}}_{\text{come verso}}$

$\Downarrow$

$L_{AB} < 0$

$L_{BA} < 0$

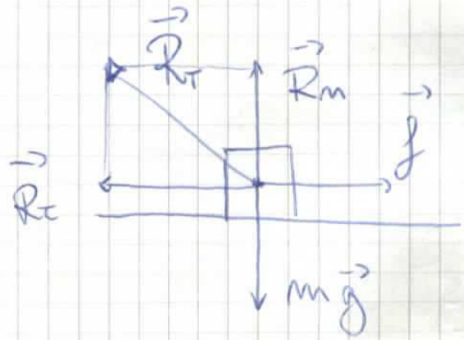
Se la forza è conservativa allora il lavoro su un percorso chiuso deve essere 0 ma:

$L_{AB} + L_{BA} \neq 0$ perché $\begin{cases} L_{AB} < 0 \text{ e} \\ L_{BA} < 0 \end{cases}$

$\mathcal{L}_{A \to B \to A}$ ← CIRCUITAZIONE

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} < 0$$

{Lavoro su qualunque percorso chiuso forza non conservativa}

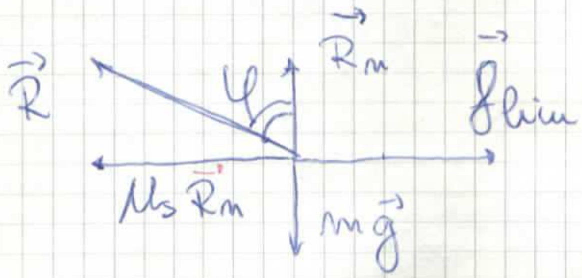


$$f_{lim} = \mu_s R_n$$

$$R_t \leq \mu_s R_n$$

$\vec{R}_n$, $\vec{R}_t$: Reazioni vincolari

$\vec{R}_T$: Reazione vincolare Totale



$$\frac{\mu_s R_n}{R_n} = \mu_s = \operatorname{Tg} \varphi_{lim}$$

μ_s è pari alla Tg te dell'angolo massimo all'interno del quale abbiamo le condizioni di reazione.

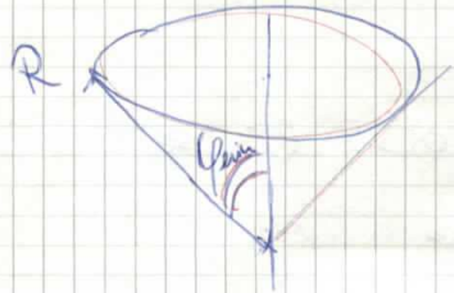
Condizione di staticità:

$$\operatorname{Tg} \varphi < \mu_s$$

L'angolo limite è in direzione opposta all'azione della forza; quindi se si analizza il comportamento su un piano si ha una reazione vincolare massima che descrive un cono.

CONO DI ATTRITO:

$$\mu_s = \text{tg}\, \varphi_{lim}$$

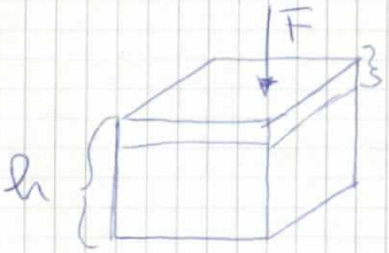


forze d'attrito

$$\begin{cases} \vec{f}_a = -b\,\hat{v} & b\,[N] \\ \vec{f}_a = -b\,\vec{v} & b\left[\dfrac{N\cdot s}{m}\right] \\ \vec{f}_a = -b\,v^2\,\hat{v} & b\left[\dfrac{N\cdot s^2}{m^2}\right] \end{cases}$$

FORZA ELASTICA

Una deformazione si dice elastica quando è ancora nella sua fase iniziale, quando cioè, se viene meno la causa di tale deformazione, il deformato torna nella sua posizione iniziale



: massimo limite per cui il comportamento è ancora elastico

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{E}\frac{F}{A}$$

F: forza applicata
A: superficie di applicazione
$\frac{\Delta h}{h}$: deformazione elastica relativa.

E: MODULO ELASTICO DI YOUNG
↑
numero sperimentale

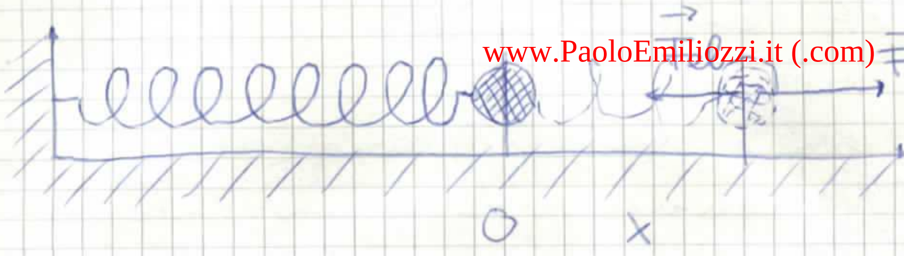
forza esterna

→ forza elastica di richiamo

$$F = \left(\frac{EA}{h}\right)\Delta h \qquad F_{el} = -F = -\left(\frac{EA}{h}\right)\Delta h$$

K: costante elastica

$F_{el} = -K\Delta h$ LEGGE DI HOOKE



Forza elastica come forza di richiamo

$$\vec{F}_{el} = -Kx\,\hat{i}$$

Supponiamo m come massa puntiforme ed il piano privo di attrito.

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_e = m\vec{a}$$

Proiettando sull'asse x:

$$-Kx = m\,a_x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0}$$

è analoga all'equazione differenziale del moto armonico avendo $\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$x(t) = x_M \sin(\Omega t + \psi)$$
$$v(t) = \Omega x_M \cos(\Omega t + \psi)$$

Posizione massima con velocità minima e viceversa.

Andiamo a dimostrare che la forza elastica è una forza conservativa.

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{f}_e \cdot d\vec{s} = \int_A^B -Kx\,dx =$$

$$-K\left[\frac{x^2}{2}\right]_A^B = \frac{1}{2}Kx_A^2 - \frac{1}{2}Kx_B^2$$

Abbiamo calcolato il lavoro procedendo direttamente da A a B:

$$B \longleftarrow A$$

proviamo a verificare se il lavoro cambia andando prima da A a C e poi da C a B

$$C \longleftarrow A$$

$$C \longrightarrow B$$

$$L_{AB} = L_{AC} + L_{CB} = \frac{1}{2} k x_A^2 - \cancel{\frac{1}{2} k x_C^2} + \cancel{\frac{1}{2} k x_C^2} - \frac{1}{2} k x_B^2$$

$$= \frac{1}{2} k \left(x_A^2 - x_B^2 \right)$$

Analogo al precedente; la forza è conservativa.

Se la forza è conservativa allora esisterà una funzione energia potenziale per la forza elastica che, a differenza di quella definita per la forza peso, non dipenderà dall'altezza ma dalla posizione x:

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 + \cancel{\text{costante}}$$

arbitrariamente posta uguale a 0, con pto di riferimento l'origine dell'asse x prima definito

$$U(x) = -\int_0^x \vec{f} \cdot d\vec{s} + \cancel{U(0)} = \frac{1}{2} k x^2$$

Si va ora ad analizzare il comportamento energetico globale del sistema ed essendo in presenza di forze conservative c'è una costante, definita energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2} m v^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t)$$

$$E = \frac{1}{2} m\, v^2(t) + \frac{1}{2} k\, x^2(t) \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E = \frac{1}{2} \underbrace{m\Omega^2}_{k} X_M^2 \cos^2(\Omega t + \psi) + \frac{1}{2} k X_M^2 \sin^2(\Omega t + \psi)$$

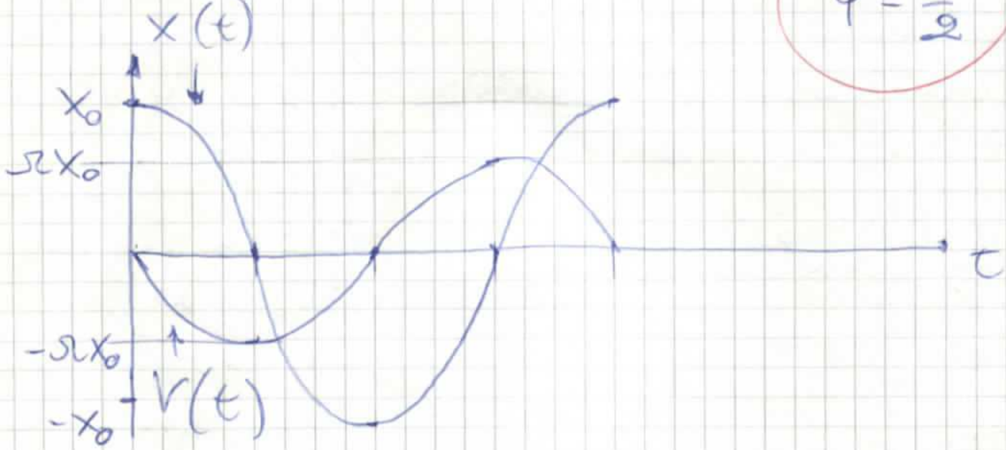
$$E = \frac{1}{2} k X_M^2 \left(\underbrace{\cos^2(\Omega t + \psi) + \sin^2(\Omega t + \psi)}_{1} \right)$$

$$E = \frac{1}{2} k X_M^2$$

$$V_M = \Omega X_M \Rightarrow E = \frac{1}{2} k \frac{V_M^2}{\Omega^2}$$

$$E = \frac{1}{2} m V_M^2$$

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$



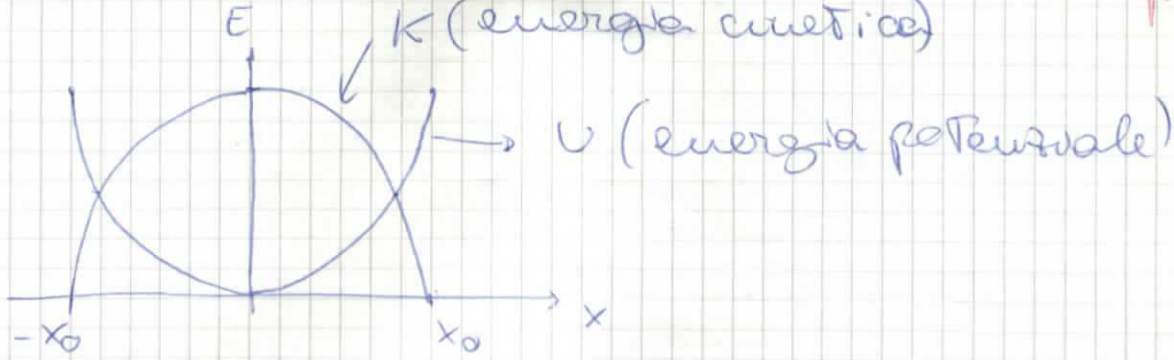
Scegliendo $\psi = \frac{\pi}{2}$ si parte dallo massimo spostamento che corrisponde alla minima velocità (0); una volta lasciata la molla $x(t)$ diminuisce e la velocità è negativa fino a passare per l'origine in cui $x(t) = 0$ e $v(t)$ è massima come intensità $(-\Omega x_0)$; superata quella posizione la compressione della molla tende a rallentare la massa e a riportarla indietro e così via.

Posizione iniziale

con $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$E = \frac{1}{2} k x_M^2 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

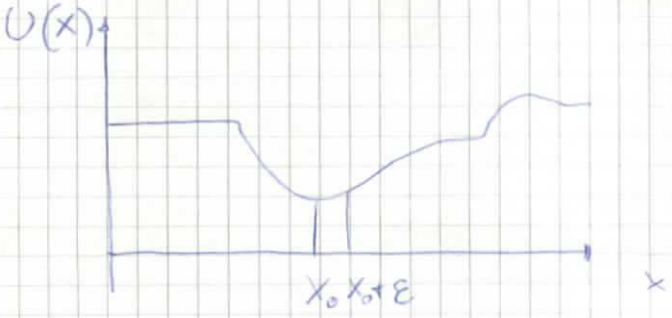
Si ha un trasferimento di energia potenziale a cinetica mantenendo costante la loro somma.



L'andamento è parabolico perché le loro espressioni matematiche sono funzioni quadre di x.

oscillatore armonico: non dipende dalle condizioni iniziali.
oscillatore anarmonico: pendolo.

Analizziamo la situazione di un pto di equilibrio stabile:



in x $\vec{F}=0$ e $U(x_0)$ ha un minimo

Per sapere l'andamento di $U(x)$ nell'intorno di x_0 espando in serie di Taylor

$$U(x) \simeq U(x_0) + \cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x_0}} \varepsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x_0} \varepsilon^2 + \cancel{\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{x_0} \varepsilon^3}$$

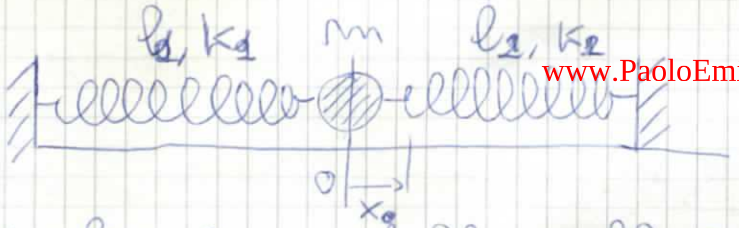
Essendo x_0 un pto di minimo la derivata prima nel pto è nulla

Trascurabile se ε è sufficientemente piccolo.

$$U(x) = U(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x_0}}_{\text{costante}} \varepsilon^2$$

Nell'intorno del pto la funzione può essere sempre approssimata ad un arco di parabola.
Praticamente nell'intorno del pto di equilibrio c'è sempre una forza di richiamo (perchè la funzione potenziale è una funzione parabolica)

Esercizio



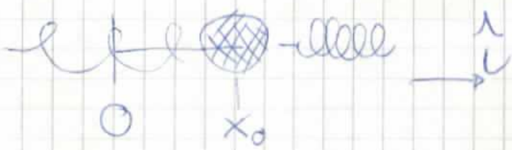
La lunghezza della molla è a riposo
piano privo di attrito

Qual'è il moto della massa spostandola da O ad x_0?

Il pto è di equilibrio se la somma delle forze applicate è uguale a 0.

in O c'è un pto di equilibrio (per le ipotesi del problema)

$$\vec{f} = m\vec{a}$$



Le due molle agiscono riportando il pto in O.
(le due forze vanno nella stessa direzione

$$\begin{cases} \vec{f}el_2 = -k_2 x \hat{i} \\ fel_1 = -k_1 x \hat{i} \end{cases}$$

$$\vec{f}_e = \vec{f}_{e1} + \vec{f}_{e2} = -(k_1 + k_2)\, x\, \hat{i}$$

$$(k_1 + k_2) x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0}$$

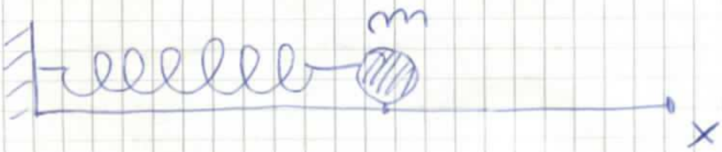
è analogo al comportamento di una sola molla con costante elastica $k_1 + k_2$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$t=0 \begin{cases} x_0 \\ v_0 \end{cases}$

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega t) + \frac{v_0}{\Omega} \operatorname{sen}(\Omega t)$$

$$x(t) = x_M \operatorname{sen}(\Omega t + \psi)$$



$$\boxed{\vec{f}_a = -b\,\hat{v}}$$ attrito dinamico $\quad -\mu_d R_n \hat{v}$

attrito che agisce con forza costante

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

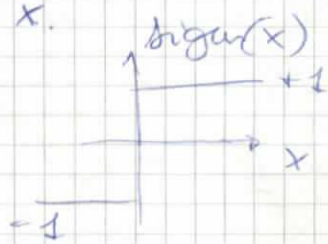
proiettando:

$$-Kx - \mu_d R_n \hat{v} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

forza elastica

perché abbiamo proiettato sull'asse x.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = -\frac{\mu_d R_n}{m} \operatorname{sign}(v)$$



Tenerla ferma e poi lasciarla andare $(v<0)$

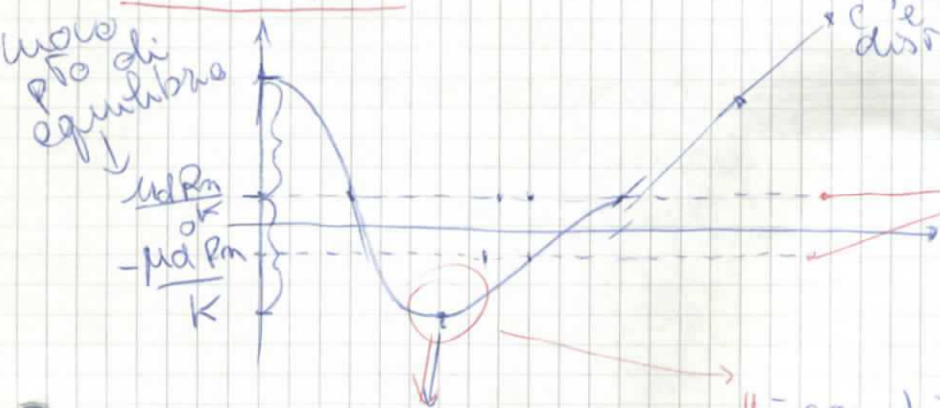
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = \left(\frac{\mu_d R_n}{m}\right)}$$

costante

Per trovare il p.to di equilibrio si pone $\vec{f}=0$
cioè $\vec{a}=0$; $\frac{d^2x}{dt^2}=0$

- La massa oscilla intorno a:

$x = \frac{\mu d R_n}{k}$ con una pulsazione pari $\sqrt{\frac{k}{m}}$



- $\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = -\frac{\mu d R_n}{m}$ ← ha cambiato il segno della velocità

→ quindi il p.to di equilibrio diventa
$x = -\frac{\mu d R_n}{k}$

Cambiando il p.to di equilibrio la curva si sposta:

Quando la forza di richiamo dovuta alla distanza dall'origine è minore della forza limite di attrito statico il corpo si ferma (la reazione totale è all'interno del cono di attrito)
non è detto che il corpo finisca in una posizione in cui le forze elastiche sono nulle (cioè nell'origine) ma in una posizione in cui tutte le forze sono nulle

FEEDBACK in saturazione

$$\boxed{\vec{f}_a = -b\,\vec{v}}$$

$$\vec{f}_{el} = -k\,x\,\hat{i}$$

proiettando:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$ (equazione del moto armonico smorzato)

$$\begin{cases} \frac{b}{m} = 2\gamma \\ \frac{k}{m} = \Omega_0^2 \end{cases}$$ ← pulsazione se non ci fosse $\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \Omega_0^2 x = 0$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t} \\ \dot{x} = \alpha e^{\alpha t} \\ \ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t} \end{cases}$$

$$\alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}} + 2\gamma\alpha \cancel{e^{\alpha t}} + \Omega_0^2 \cancel{e^{\alpha t}} = 0$$

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \Omega_0^2 = 0$$ EQUAZIONE CARATTERISTICA DELL'EQ. DIFFERENZIALE

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$ 2 soluzioni (quindi si potrebbe combinare)

In generale:

Integrando un'eq. differenziale escono sempre 2 costanti:

$$\boxed{x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t}}$$

A e B si trovano fissando a $t_0=0$ x_0 e v_0; costanti univocamente determinate, soluzione unica.

$$t_0 = 0 \quad \begin{cases} x_0 \\ v_0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

$\Omega_0^2 > \gamma^2$ caso dell'oscillatore smorzato

$\Downarrow$

$$\alpha = -\gamma \pm i\Omega \quad \longleftarrow \quad \Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$$

vera pulsazione dell'oscillazione (più piccola di Ω_0) più forte è b più grande è γ e minore è la pulsazione. (più grande c'è l'attrito)

$$x(t) = A e^{-(\gamma - i\Omega)t} + B e^{-(\gamma + i\Omega)t}$$

* $$\begin{cases} x(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t}\right) \\ v(t) = (-\gamma + i\Omega) A e^{-(\gamma - i\Omega)t} - (\gamma + i\Omega) B e^{-(\gamma + i\Omega)t} \end{cases}$$

Ora sfruttiamo le condizioni iniziali in $t=0$

* $$\begin{cases} x_0 = A + B \quad \longrightarrow \quad A = x_0 - B \\ v_0 = (-\gamma + i\Omega) A - (\gamma + i\Omega) B \end{cases}$$

$$v_0 = (-\gamma + i\Omega)(x_0 - B) - (\gamma + i\Omega) B$$

$$v_0 + (\gamma - i\Omega) x_0 = -B(2i\Omega)$$

* $$\begin{cases} B = \dfrac{-x_0(\gamma - i\Omega)}{2i\Omega} - \dfrac{v_0}{2i\Omega} \\ A = \dfrac{x_0(\gamma + i\Omega)}{2i\Omega} + \dfrac{v_0}{2i\Omega} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t}\right)$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[\frac{x_0}{2i\Omega}(\gamma + i\Omega)e^{i\Omega t} + \frac{v_0}{2i\Omega}e^{i\Omega t} - \frac{x_0}{2i\Omega}(\gamma - i\Omega)e^{-i\Omega t} - \frac{v_0}{2i\Omega}e^{-i\Omega t}\right]$$

$$x(t) = \left[\frac{x_0\gamma}{\Omega}\frac{\left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right)}{2i} + \frac{x_0}{2}\left(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}\right) + \frac{v_0}{2i\Omega}\left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right)\right] \cdot e^{-\gamma t}$$

$$x(t) = \left[\frac{x_0\gamma}{\Omega}\operatorname{sen}(\Omega t) + x_0\cos\Omega t + \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]e^{-\gamma t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[x_0\cos(\Omega t) + \left(\frac{x_0\gamma + v_0}{\Omega}\right)\sin(\Omega t)\right]$$

Nell'oscillatore senza smorzamento: $(b=0)$ SMORZAMENTO NULLO

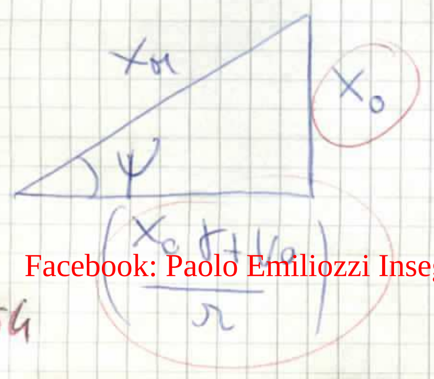
$$x(t) = x_0\cos(\Omega_0 t) + \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega_0 t)$$

se $b=0$ $\quad \Omega = \Omega_0 \quad$ e $\gamma = 0$

e ritroviamo la formula ricavata

Tentiamo di compattare la formula:

$$x_M = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0\gamma + v_0}{\Omega}\right)^2}$$

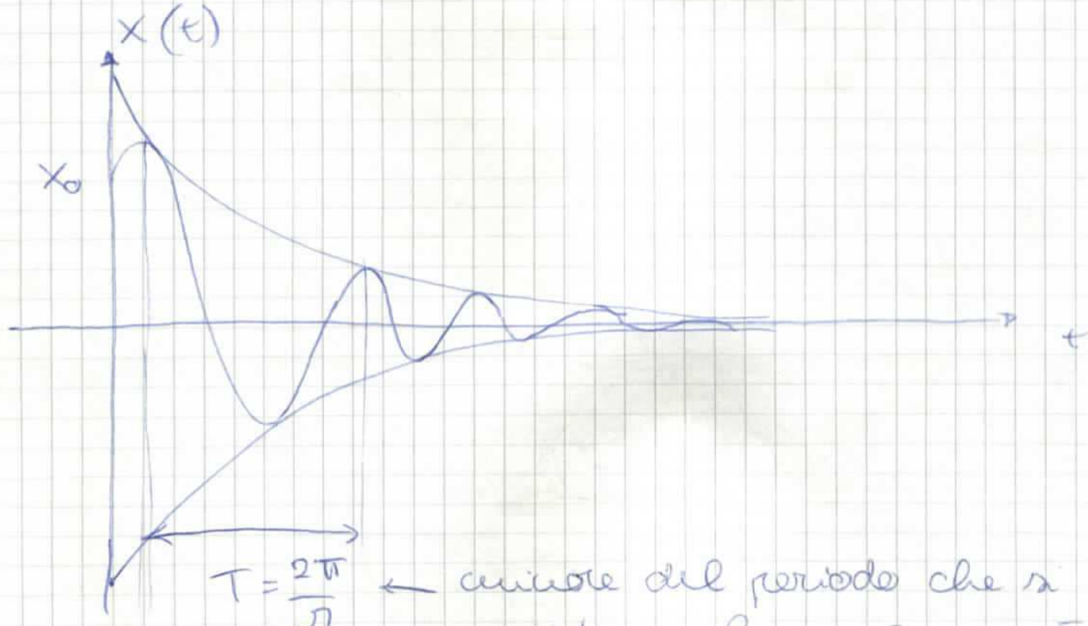


$$\operatorname{tg}\psi = \frac{x_0\Omega}{x_0\gamma + v_0}$$

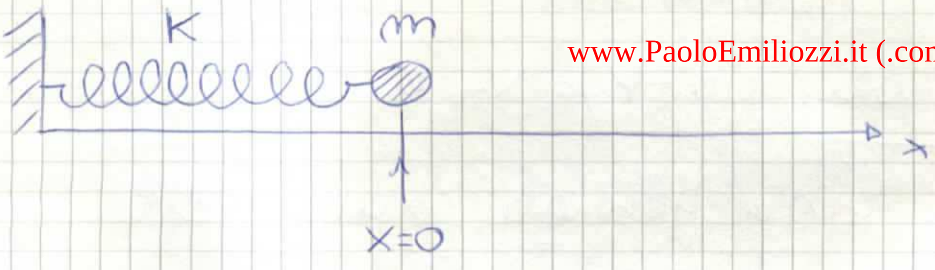
$$x(t) = e^{-\gamma t} X_M \sin(\Omega t + \varphi) = X_M e^{-\gamma t} \sin(\Omega t + \varphi)$$

da un p.to di vista formale compare solo $e^{-\gamma t}$ però l'ampiezza e la fase non hanno la stessa espressione che nel moto armonico

È γ che da conto dello smorzamento ed concorre sia l'ampiezza che la fase e non solo il termine di spostamento $e^{-\gamma t}$



← minore del periodo che si avrebbe se lo smorzamento fosse nullo



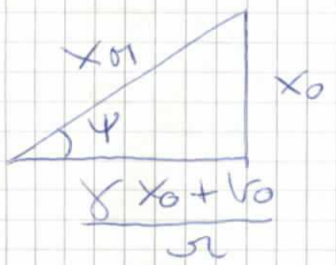
$$\vec{f}_a = -b\vec{v}$$

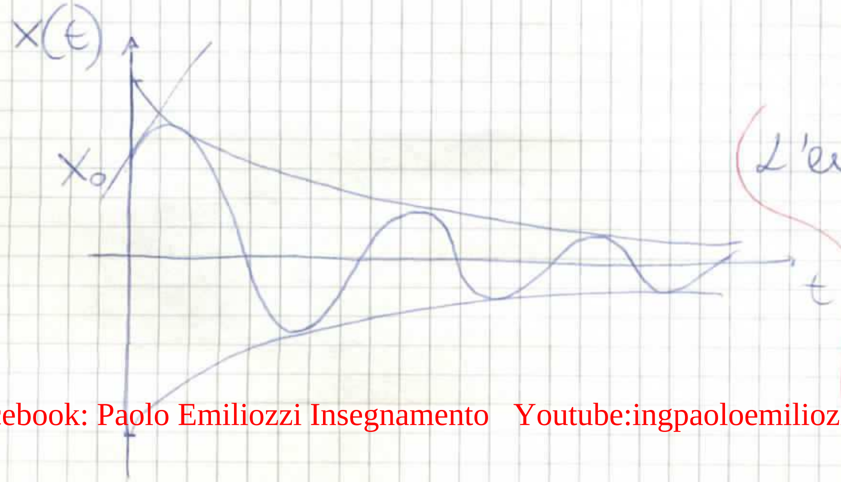
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{2\gamma\frac{dx}{dt}}_{\text{forza di resistenza passiva}} + \underbrace{\Omega_0^2 x}_{\text{forza di richiamo}} = 0}$$

$$\begin{cases} 2\gamma = \dfrac{b}{m} \equiv \dfrac{1}{\tau} \longrightarrow e^{-\frac{t}{2\tau}} \\ \Omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

$$x(t) = x_m e^{-\gamma t} \sin(\Omega t + \psi)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$$





(L'energia meccanica diminuisce (siamo in presenza di forze non conservative))

$$\mathcal{L}^{mc} = \int_0^{t=\infty} \vec{f}_a \cdot d\vec{s}$$

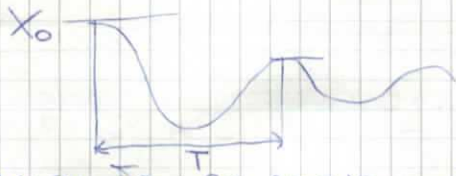
$$\mathcal{L}^{mc} = \cancel{E_f} - E_i$$

{le oscillazioni vanno a 0 (il punto materiale si ferma nel p.to di equilibrio con velocità nulla).}

{L'energia è stata dissipata: l'energia è sottratta dalle forze non conservative che fanno del lavoro}

$$E_i = E_f \underbrace{- \mathcal{L}^{mc}}_{\text{energia dissipata}}$$

$$E_i = E_f + E_{diss}$$



$v_0 = 0 \qquad x_0 = x_0 \neq 0$

In un periodo quanta energia è stata dissipata?

$\Omega_0 >> \gamma \Rightarrow \Omega \sim \Omega_0$

0 perchè $\Omega_0 >> \gamma$

$$e^{-\gamma t} \qquad e^{-\gamma T} = e^{-\frac{2\pi\gamma}{\Omega}} = e^{-\frac{2\pi\gamma}{\Omega_0}} \sim 1$$

$$tg\,\psi = \frac{\Omega x_0}{\cancel{\gamma x_0} + v_0}$$ ← fase del moto non smorzato

$\Omega >> \gamma$

se $v_0 = 0 \Rightarrow tg\,\psi = \infty \qquad \psi = \frac{\pi}{2}$

$v_0 = 0 \qquad x(t) \overset{\psi}{=} x_0 \cos \Omega_0 t$

$$*P_d(t) = \vec{f}_a \cdot \vec{v} \qquad \underline{\vec{f}_a = -b\,\vec{v}}$$

$$*P_d(t) = -b\, v^2(t)$$

$$\underline{v(t) \simeq -\Omega_0 x_0 \sin(\Omega_0 t)}$$

$$*P_d(t) = -b\,\Omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\Omega_0 t)$$

è negativa perché la potenza è dissipata

$$L_T^{m.c.} = \int_0^T P_d(t)\,dt = -b\,\Omega_0^2 x_0^2 \underbrace{\int_0^T \sin^2(\Omega_0 t)\,dt}_{\frac{T}{2}}$$

$$L_T^{m.c} = -\frac{b\,\Omega_0^2 x_0^2\, T}{2} = -\frac{b\,\Omega_0^{\cancel{2}} x_0^2}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\Omega_0}} = -b\,\Omega_0 x_0^2 \pi$$

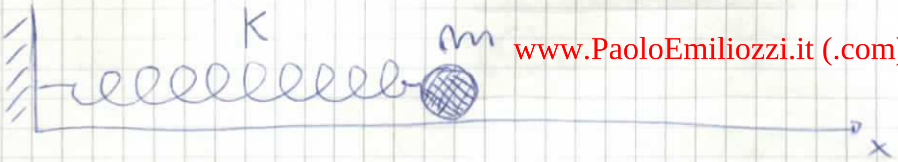
$$E_{\text{dissipata in } T} = -L_T^{m c} = b\,\Omega_0 x_0^2 \pi$$

$$Q = 2\pi \frac{E_{iniziale}}{E_{dis,T}}$$

← COEFFICIENTE DI MERITO

$$K = \Omega_0^2 m$$

$$Q = \cancel{2\pi}\,\frac{\frac{1}{\cancel{2}} K \cancel{x_0^2}}{\cancel{\pi}\, b\,\Omega_0 \cancel{x_0^2}} = \frac{K}{b\Omega_0} = \frac{\Omega_0^{\cancel{2}} m}{b\,\cancel{\Omega_0}} = \frac{\Omega_0 m}{b} = \Omega_0 \tau$$



$F = F_M \sin \omega t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \Omega_0^2\, x = F \sin(\omega t)$$

Ω_0: pulsazione naturale in assenza di smorzamento
Ω : pulsazione naturale in presenza di smorzamento

|| Transiente: termine transitorio: esiste solo per un po' di tempo (è smorzato) ||

$x(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{libera}} + \underbrace{x(t)}_{\text{forzata}}$ ← A REGIME

(omogenea) (particolare)

è quella che si avrebbe senza F

dopo un po' rimane solo la soluzione forzata, particolare a REGIME.

Il pto oscilla con la frequenza della forza esterna:

$x(t) = X_M \sin(\omega t + \psi)$

ω: frequenza della forza applicata.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = F_M \sin(\omega t)}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} x(t) = x_M \sin(\omega t + \psi) & \Omega_0^2 & + \\ \dot{x}(t) = \omega x_M \cos(\omega t + \psi) & 2\gamma & + \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 x_M \sin(\omega t + \psi) & 1 & = \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_0^2 x_M [\sin(\omega t)\cos\psi + \cos(\omega t)\sin\psi] + \\ 2\gamma\omega x_M [\cos(\omega t)\cos\psi - \sin(\omega t)\sin\psi] + \\ -\omega^2 x_M [\sin(\omega t)\cos\psi + \cos(\omega t)\sin\psi] = F_M \sin\omega t \end{array}\right\}$$

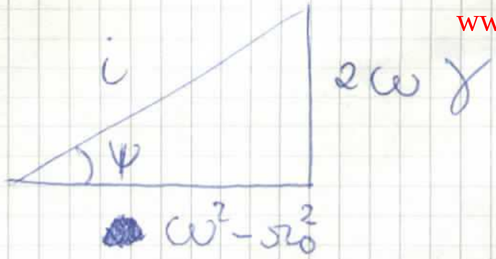
$$\left\{\begin{array}{l} \sin(\omega t)\underbrace{[\Omega_0^2 x_M\cos\psi - 2\gamma\omega x_M\sin\psi - \omega^2 x_M\cos\psi - F_M]}_{C_1} + \\ \cos(\omega t)\underbrace{[\Omega_0^2 x_M\sin\psi + 2\gamma\omega x_M\cos\psi - \omega^2 x_M\sin\psi]}_{C_2} = 0 \end{array}\right\}$$

$C_1 \operatorname{sen}(\omega t) + C_2\cos(\omega t) = 0$ deve essere verificato in ogni istante di tempo

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array}\right. \leftarrow \text{SOLUZIONE BANALE}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_M\{(\Omega_0^2 - \omega^2)\cos\psi - 2\omega\gamma\sin\psi\} = F_M \\ x_M\{(\Omega_0^2 - \omega^2)\sin\psi + 2\omega\gamma\cos\psi\} = 0 \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{-2\omega\gamma}{\Omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\omega\gamma}{\omega^2 - \Omega_0^2} \quad \left(\text{dalla } 2^a\right)$$



$$i = \sqrt{(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + (2\omega\gamma)^2} = \sqrt{\ }$$ ← per semplicità lo indichiamo così.

$$2\omega\gamma = \sqrt{\ }\,\sin\psi$$ dall'analisi del triangolo

$$\cos\psi = \frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{\cancel{\cos\varphi}\,\sqrt{\ }}$$

$$\frac{\sqrt{\ }^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{\ }}}$$

$$x_M \left[-\frac{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2}{\sqrt{\ }} - \frac{(2\omega\gamma)^2}{\sqrt{\ }} \right] = F_M$$ ← (nella 1ª)

$$-x_M \left[\sqrt{(\ )} \right] = F_M \Rightarrow x_M = \frac{-F_M}{\sqrt{\ }}$$

$$\left\{ x_M = \frac{-F_M/m}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \right\}$$

contiene il termine d'attrito

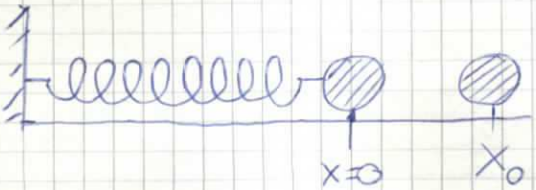
dipende dalla frequenza naturale

frequenza della forza

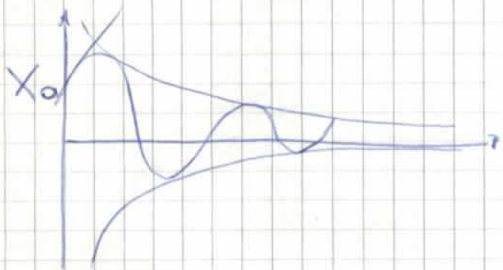
L'ampiezza e lo sfasamento dipende da $F_M \sin(\omega t + \psi)$

se $\omega = \Omega_0$ allora x_M è massimo: CONDIZIONE DI RISONANZA.

La forza esterna spinge con una frequenza pari alla frequenza libera (sincronizzata)



$\vec{f}_a = -b\vec{v}$ $\qquad \Omega_0 > \gamma$ caso analizzato in precedenza



$$\boxed{\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2}}$$

* $\Omega_0 < \gamma$

abbiamo 2 soluzioni reali

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2} \\ \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2} \end{cases}$$

$$X(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t}$$

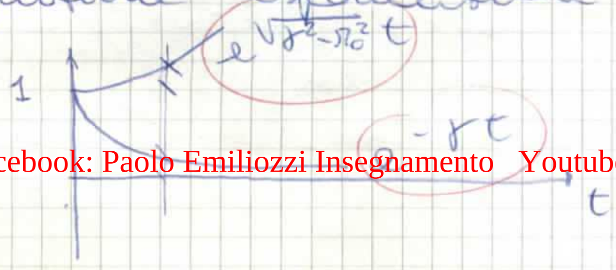
$< \gamma$

$$e^{\alpha_1 t} = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{decrescente}} \underbrace{e^{+\sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2}\,t}}_{\text{crescente}}$$

$$\sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2}\,t = \gamma\sqrt{1-\left(\frac{\Omega_0}{\gamma}\right)^2}\,t$$

quindi $e^{\sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2}\,t}$ è minore come apporto di $e^{-\gamma t}$

domina (per tempi molto lunghi va a 0) la funzione esponenziale decrescente:



Con il prodotto globale vince la funzione decresce

$$e^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t} \, e^{-\sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2}\, t}$$

a maggior ragione $e^{\alpha_2 t}$ essendo il prodotto di due funzioni smorzate sarà anch'essa smorzata.

Il valore x non supera mai lo 0; l'attrito è talmente forte che la massa torna alla posizione di equilibrio senza superarla.

L'energia del pto materiale (meccanica) è totalmente dalla forza d'attrito prima di superare la posizione $x=0$

$\Omega_0 = \gamma$: SMORZAMENTO CRITICO

* ——— * ——— *

$$\vec{f} = F_M \sin(\omega t)\,\vec{i}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{F_M}{m}\sin(\omega t)$$

$$\underbrace{x(t) = x_e(t)}_{\text{libero}} + \underbrace{x_g(t)}_{\text{forzato}}$$

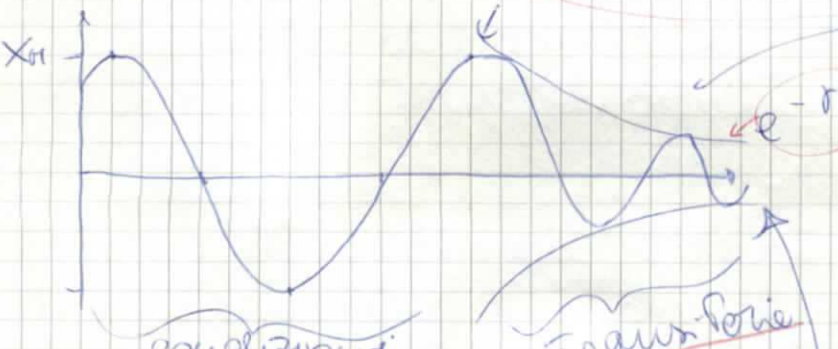
$\downarrow$

$x_M \sin(\omega t + \psi)$

Vale solo se immaginiamo che il forzamento è sempre esistito (abbiamo atteso gli effetti transienti) cioè se non contiamo la $x(t)$ libera che, tra l'altro, è transitoria.

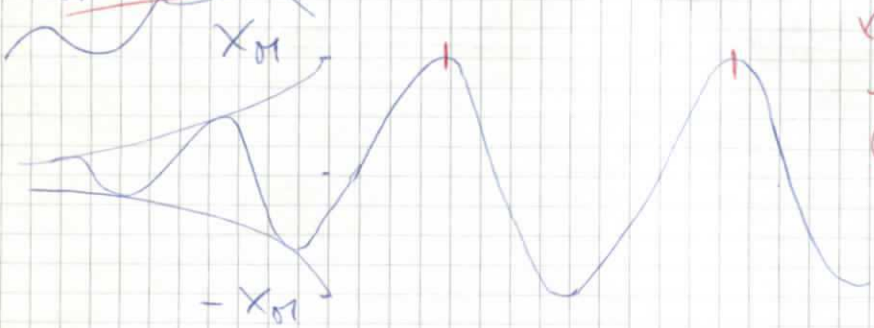
$X_M \sin(\omega t + \psi)$

Togliamo la F accade



Agendo con la forza sul p.to materiale fermo allora per arrivare al valore massimo X_M (fine degli effetti transienti) occorre attendere lo stesso numero di oscillazioni che fanno arrivare questo a 0.:

Transitorio



caso in cui si inizia ad applicare la forza sul p.to materiale fermo (c'è il periodo iniziale transitorio).

$\frac{1}{2} K X_M^2$ {Energia meccanica quando si è su di un p.to massimo}

{In condizioni di regime da un p.to all'altro non c'è variazione di energia meccanica. (Tra due massimi successivi)

Ma la forza d'attrito tende a far diminuire l'energia meccanica (c'è la forza che la compensa); infatti togliendo F l'energia meccanica va a 0.

La F fornisce la quantità di energia necessaria a mantenere l'ampiezza dell'oscillazione costante cioè costante l'energia meccanica tra due massimi (chiusi interessandoci del comportamento che si ha tra un massimo e l'altro.

$$x_M = \frac{F_M/m}{\sqrt{(\Omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$$

condizioni di risonanza

*se $\omega = \Omega_0$ con $\psi = \frac{\pi}{2}$

$$x_M = \frac{F_M}{2\gamma\Omega_0 m} \qquad 2\gamma = \frac{b}{m}$$

coefficiente di attrito

$$x_M = \frac{F_M}{\Omega_0 b}$$

{ampiezza massima ottenibile con $\Omega_0 = \omega$}

è un coseno perché $\psi = \frac{\pi}{2}$

con $\omega = \Omega_0$

$$x(t) = x_M \cos \omega t = x_M \cos \Omega_0 t$$

Lavoro compiuto dalla forza esterna in un periodo:

$$L = \int_0^T \vec{f}\cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\vec{v}\cdot dt} = F_M \int_0^T \underbrace{\sin(\omega t)}_{\vec{f}} \underbrace{\underbrace{(-\omega x_M \sin \omega t)}_{v(t)} dt}_{d\vec{s}} =$$

$$= -\omega F_M x_M \underbrace{\int_0^T \sin^2(\omega t)\, dt}_{T/2} = \underbrace{\frac{1}{2}\omega F_M x_M T}_{} = |L|$$

Quantità di energia che entra nel sistema

{dalle forze d'attrito}

$$|E_{dis}| = \frac{b}{2} x_M^2 \Omega_0^2 T$$

Per la condizione di regime deve essere:

$$|E_{dis}| = |L|$$

cioè il lavoro compiuto dalla forza è uguale all'energia dissipata dalla fa.

cioè: $\underbrace{\text{energia dissipata}}$ $\underbrace{\text{lavoro fatto}}$

$$\frac{b}{2} x_{0M}^2 \Omega_0^2 \cancel{\pi} = \frac{1}{2} \omega F_M \cancel{x_M \pi}$$

cioè ricordando che: $\omega = \Omega_0$ in risonanza:

$$x_{0M} = \frac{\omega F_M}{b \Omega_0^2} = \frac{F_M}{\Omega_0 b}$$

$$x_M = \frac{F_M}{\Omega_0 b}$$

{cioè l'ampiezza massima è dovuta all'uguaglianza tra l'energia dissipata e quella fornita}

Spostandoci dalla condizione di risonanza non cambia l'energia dissipata ma la forza non agisce più in sincronismo con il pto materiale (si fa un lavoro negativo, uno positivo); mediamente il lavoro complessivo è minore di quello in condizioni di risonanza e quindi l'ampiezza massima diminuisce. L'equilibrio avviene per una ampiezza più piccola.

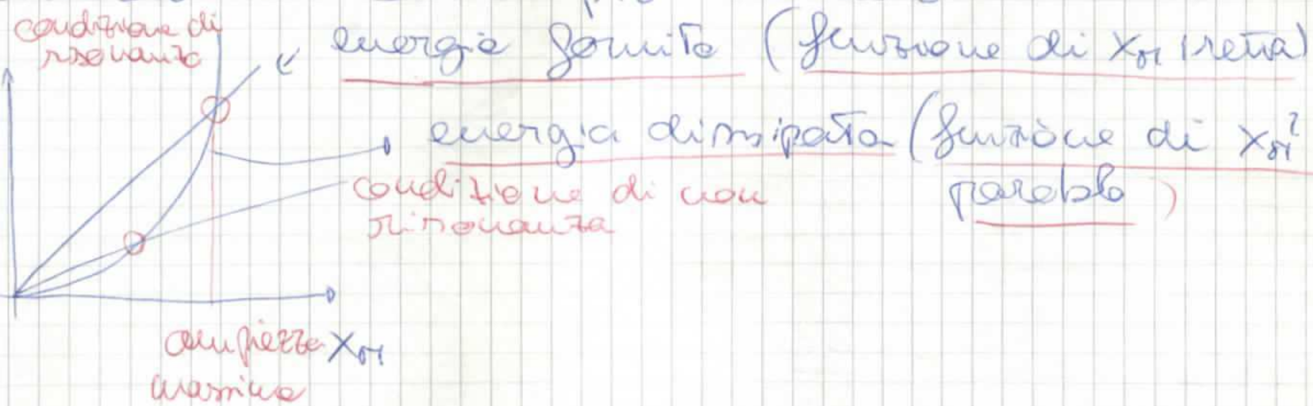
(A regime c'è equilibrio tra $|L|$ e $|E_{dis}|$ solo che in condizioni di risonanza il lavoro che si riesce a fornire è massimo mentre in condizioni di non risonanza il lavoro diminuisce e l'ampiezza di oscillazione diminuisce.)

Lo si può capire dalla formula:

$$x_M = \frac{F_M / m}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

disegnandola

* con $\omega = 0$ è una forza costante che spinge verso destra (fino a fermarsi in X_M)
* con $\omega \to \infty$ l'ampiezza va a 0 con $\frac{1}{\omega^2}$
* con $\omega = \Omega_0$ X_M è massima perché il buco è fatto in sincronismo con il pto materiale



Analizziamo la situazione che abbiamo partendo da fermi e applicando la forza (periodo con spostamento transiente).

$e^{-\gamma t}$: curva di inviluppo

$f(t) = e^{-\gamma t}$

$f(T) = e^{-\gamma T}$

$\frac{b}{m} = 2\gamma = \frac{1}{\tau}$

di quanto è diminuito in un periodo l'oscillazione

$Q = \Omega_0 \tau$

$\tau = \frac{Q}{\Omega_0}$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$f(T) = e^{-\frac{T}{2\tau}}$

$f(T) = e^{-\frac{T\,\Omega_0}{2Q}} = e^{-\frac{\pi}{Q}}$

Quanti periodi deve attendere perché l'oscillazione sia trascurabile;

$t = Q\,T$ ← proviamo

x^2 in questo tempo va a 0 perché a noi ci interessa l'energia che è funzione di x^2

$$f(QT) = e^{-\pi}$$

$$E(QT) = E_i\,e^{-2\pi}$$

← condizioni di regime perché $2\pi > 5$

Quindi aspettando Q volte un periodo arrivo a 0 con buona approssimazione

Partendo dall'energia nulla e fornendo energia al sistema.

$$Q = 2\pi \frac{E_i}{E_T}$$

$$E_T = 2\pi \frac{E_i}{Q}$$

↑ dissipata in un periodo

E_1: il pto è fermo e gli si da E_1

$$E_2 = 2E_1 - \frac{E_1\,2\pi}{Q}$$ → dissipata in un periodo

L'energia data è costante ma è una quantità di energia dissipata.
L'equilibrio si avrà quando; $n \cong Q$

$$E_n = E_{n-1}$$

cioè l'energia fornita è uguale a quella dissipata

OSCILLATORE ACCOPPIATO

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$k_1 = k_2 = k$$

OSCILLATORE ACCOPPIATO

k_{12} è una molla che tiene conto delle mutue oscillazioni.

$F = ma$

(allungamento della seconda molla meno allungamento della prima.)

$$\begin{cases} (1)\quad m \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \\[2ex] (2)\quad m \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = -k x_2 + k_{12}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\quad \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(\dfrac{k_{12}+k}{m}\right) x_1 = \dfrac{k_{12}\, x_2}{m} \\[2ex] (2)\quad \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + \left(\dfrac{k_{12}+k}{m}\right) x_2 = \dfrac{k_{12}\, x_1}{m} \end{cases}$$

La soluzione generale è data dalla combinazione lineare delle 2 soluzioni particolari.

$x_1 = x_2 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Si può pensare che sia una soluzione

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

x_0 e φ vanno specificati a seconda delle condizioni iniziali del problema.

dalla principale

$$\frac{k_{12}}{\cancel{m}} x_1 = \frac{k_{12}}{\cancel{m}} x_2$$

(ed otteniamo un'equazione uguale a quella canonica con soluzioni $x_0(\sin(\omega_0 t + \varphi)$)

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ x_2 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases}$$

→ è soluzione perché

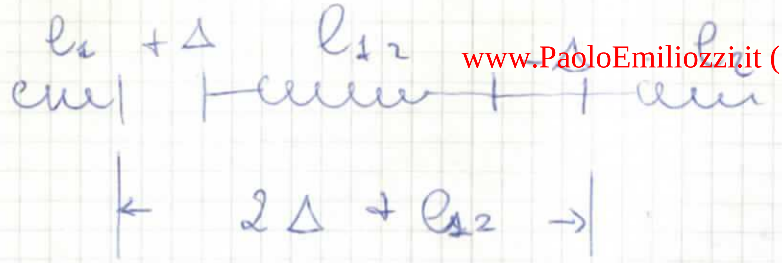
Uno dei modi possibili con cui si può comportare il sistema è muoversi in fase (non c'è alcuna forza di interazione tra i due oscillatori; non c'è k_{12}; l'allungamento sarebbe $x_2 - x_1$ che è 0 nel nostro caso).

La forza elastica di interazione non agisce (L'energia potenziale è associata alla prima e alla seconda molla; non a quella centrale che non si allunga: $x_2 - x_1 = 0$)

MODO NORMALE DI OSCILLAZIONE.

(Supponiamo $x_1 = -x_2$ che è sempre un MODO NORMALE DI OSCILLAZIONE }. L'allungamento della molla centrale k_{12} sarà doppio degli allungamenti delle 2 molle. (subisce l'azione concorrente del primo e del secondo oscillatore).)

OSCILLATORI IN CONTROFASE



Interazione elastica tra i 2 sistemi.

se $x_1 = -x_2$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{(2k_{12}+k)}{m}x_1 = 0$$

Equazione differenziale di un oscillatore con costante elastica uguale a $(2k_{12}+k)$

La soluzione sarà di questa forma:

$$x_1 = x \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_{12}+k}{m}}$$

Sono altre 2 soluzioni particolari:

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \\ x_2 = -\bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \end{cases}$$

L'oscillatore si potrebbe comportare in modo diverso dai due casi estremi che abbiamo appena analizzato.
Per trovare quindi la soluzione generale ed il comportamento dell'oscillatore in tutti i casi occorre combinare le 2 soluzioni particolari ottenute

SOLUZIONE GENERALE:

$$* \begin{cases} x_1 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \\ x_2 = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \bar{x} \sin(\omega t + \bar{\varphi}) \end{cases}$$

$\varphi_0 = \varphi = 0$ e $x_0 = \bar{x}$:

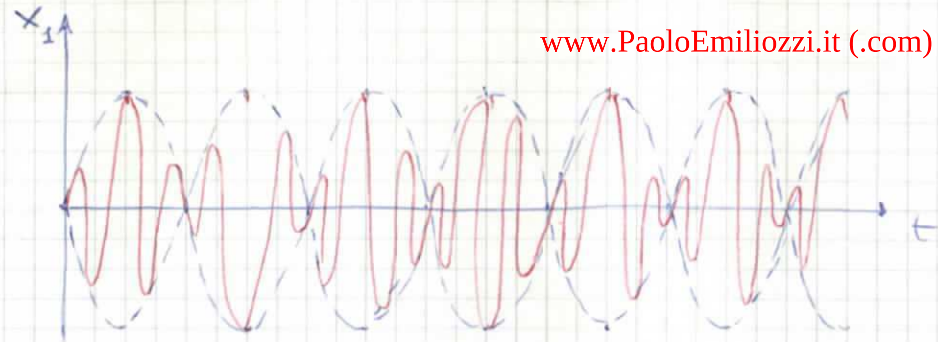
$$* \begin{cases} x_1 = x_0 (\sin \omega_0 t + \sin \omega t) \\ x_2 = x_0 (\sin \omega_0 t - \sin \omega t) \end{cases}$$ ← altre 2 soluzioni possibili.

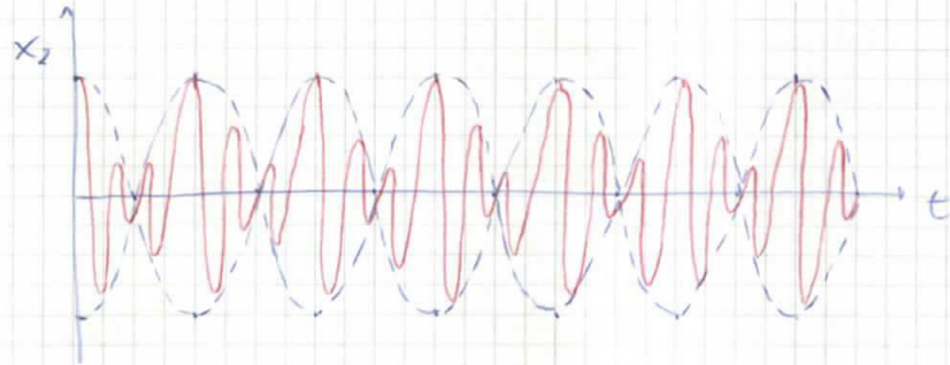
prostaferesi:

$$* \begin{cases} x_1 = 2 x_0 \cos\left[\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right] \operatorname{sen}\left[\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right] \\ x_2 = 2 x_0 \operatorname{sen}\left[\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right] \cos\left[\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right] \end{cases}$$

2 funzioni che variano con una frequenza pari a $\frac{\omega + \omega_0}{2}$ e con ampiezza $2 x_0 \cos \frac{\omega - \omega_0}{2}$, $2 x_0 \operatorname{sen} \frac{\omega - \omega_0}{2}$

ampiezza variante nel tempo.
ampiezza di oscillazione modulata





Quando uno dei due oscillatori ha la massima elongazione l'altro ha la nulla

Energia Totale dell'oscillatore:

$$E_1 = U + K = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} k_{12} (x_1 - x_2)^2$$ * {distribuzione energetica diversa dalle singole energie}

$$E_{TOT} = E_1 + E_2 + E_{12} = \text{costante}$$

E_{12} è l'energia che si trasferisce da un oscillatore all'altro.