Osservazione del fenomeno
Analisi del fenomeno: elementi comuni

OSSERVAZIONE
⇓ RAGIONAMENTO (elementi comuni ecc): PROCESSO INDUTTIVO
LEGGI (modelli che descrivono la realtà: valida fino a quando non è contraddetto)
⇓ PROCESSO DEDUTTIVO
SPERIMENTAZIONE

S I unità (MKS)

METRO
SECONDO
KILOGRAMMO

SECONDO

Atomo di Cesio (irragia energia) ISOTOPO emette una lunghezza d'onda ben precisa: 9 miliardi di volte il periodo di una oscillazione dell'atomo di Cesio è un SECONDO.

METRO

La distanza che percorre la luce nel vuoto in un $\Delta t \simeq \frac{1}{3\times10^8}$ sec.

CINEMATICA: Descrizione del moto di un p.to materiale o di un qualsiasi altro oggetto.

CINEMATICA

Descrive lo studio del moto degli oggetti. (senza analizzarne le cause che lo generano)

POSIZIONE in un certo ISTANTE

Se vogliamo descrivere il moto dell'oggetto vogliamo sapere come varia la posizione nel tempo.

→ VARIAZIONE DI POSIZIONE NEL TEMPO

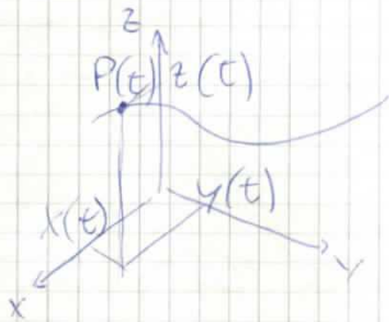
CINEMATICA DI UN PTO MATERIALE

PTO MATERIALE: oggetto di dimensioni trascurabili rispetto a ...

su una retta 1 parametro
su un piano 2 parametri

{Relatività e parametri individuanti la posizione di un pto materiale immerso in un qualsiasi ente}

$$P = [x(t_0), y(t), z(t)]$$



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ EQUAZIONE ORARIA DEL MOTO

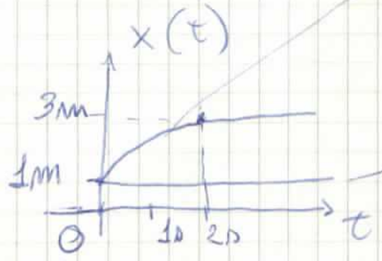
MOTO RETTILINEO: è il moto di un pto che si sposta lungo una retta (1 eq.)

MOTO PIANO: è il moto di un pto che si sposta su di un piano. (2 eq.)

MOTO RETTILINEO

$x = x(t)$

1 * si fanno delle misure ad un certo intervallo una dall'altra

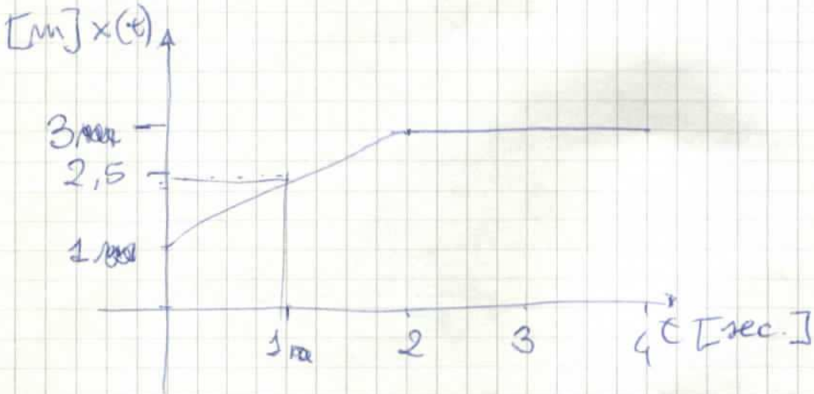


* posizione invariante nel tempo

* Scelta dell'istante iniziale in riferimento al fenomeno studiato

Il pto materiale ha percorso 2 metri in 2 secondi: 1 metro al secondo (parliamo di velocità solo in termini globali: **VELOCITÀ MEDIA**)

$$\frac{2 \text{ metri}}{2 \text{ secondi}} = \bar{v}_{media}$$



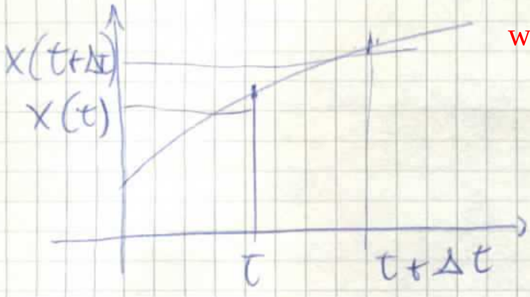
$$\frac{0 \text{ metri}}{2 \text{ secondi}} \ (\text{da } 2\,s \text{ a } 4\,s) = \bar{v} \equiv 0$$

1 e 2 $\quad \frac{0{,}5 \text{ metri}}{1 \text{ secondo}} = 0{,}5\, m/s \equiv \bar{v}$

0 e 1 $\quad \frac{1{,}5 \text{ metri}}{1 \text{ secondo}} = 1{,}5\, m/s = \vec{v}$

Per stabilire la velocità in un istante ben preciso e non la velocità media si opera prendendo intervalli di tempo molto piccoli

da t ... posizione $x(t)$ a $x(t + \Delta t)$



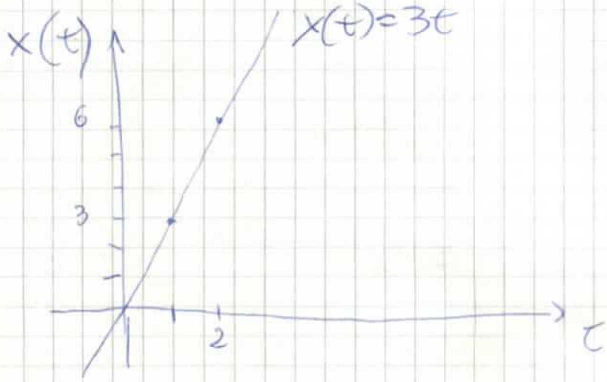
$$\bar{v} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Supponiamo di decrementare progressivamente l'intervallo di tempo nel quale si fa l'analisi; la velocità media si avvicina alla velocità reale in un determinato istante.

Velocità istantanea:

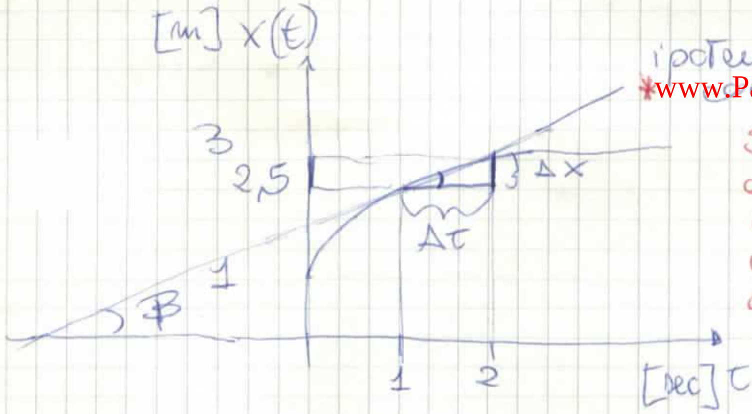
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overbrace{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}^{\bar{v}} = x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$$

se $x(t) = 3t$;



$$\frac{d\,x(t)}{dt} = 3\ m/s$$

MOTO RETTILINEO UNIFORME: la velocità non varia nel tempo



ipotenusa del triangolo rettangolo

Sfruttando questa proprietà si arriva a capire che la velocità istantanea coincide numericamente con la $tg\,\alpha$; dove α è l'angolo formato dalla retta tgte

$$\bar{v} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

numericamente e non in unità di misura

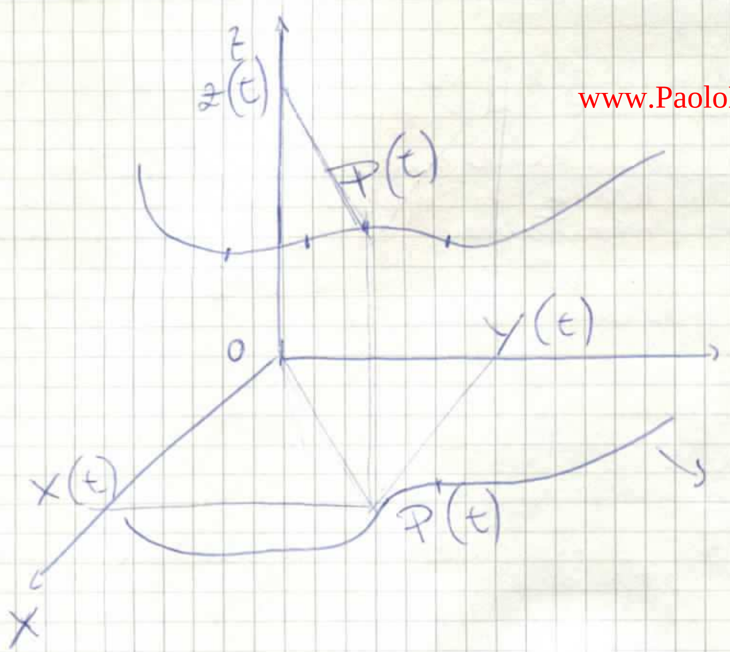
$$\Delta x = \Delta t \; tg\,\beta \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v} = tg\,\beta$$

La velocità istantanea è uguale numericamente all'inclinazione ($tg\,\beta$) della retta tgte alla curva nel punto corrispondente all'istante considerato:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\,\alpha$$

con α che è l'angolo formato con la tgte nel pto

La velocità di partenza nel nostro caso parte da un certo valore ed arriva a 0:

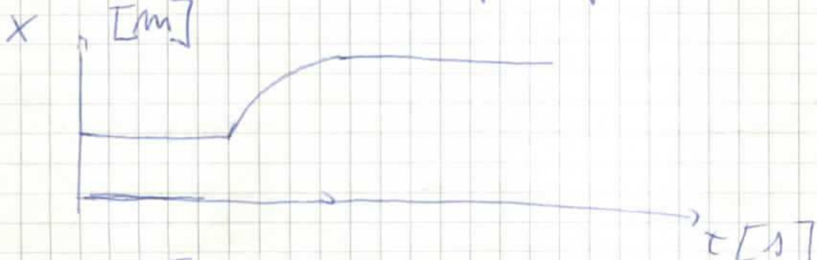


Proiezione sul piano: moto piano

Per conoscere la traiettoria occorre e basta conoscere come varia il punto in funzione del tempo:

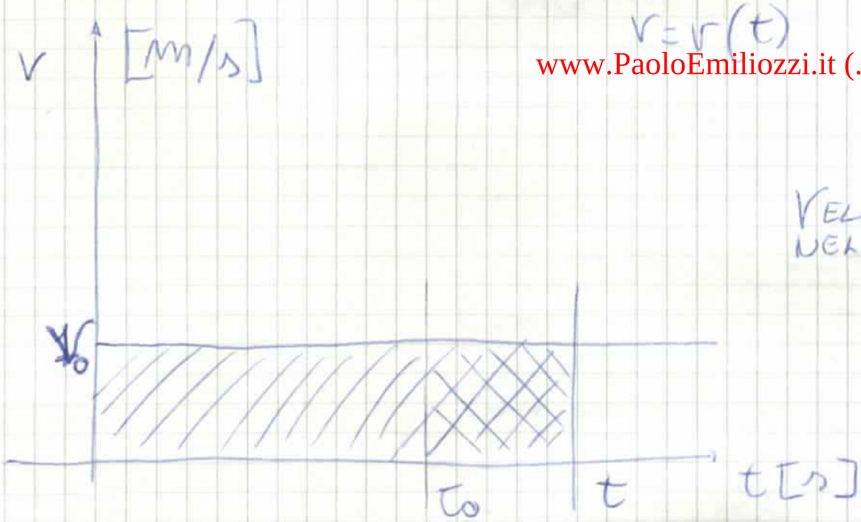
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ Equazione oraria del moto

Nell'analisi del moto rettilineo posso arbitrariamente variare sia l'istante iniziale di riferimento sia la posizione rispetto alla quale vado a misurare le distanze; il grafico è lo stesso formalmente, diverso come posizione;
Riprendendo l'esempio precedente:



La velocità assume però sempre la stessa forma

$v = v(t)$



VELOCITÀ COSTANTE NEL TEMPO.

Per ricavare dalla velocità lo spostamento si opera con l'integrale

Dopo 20 sec quanto spazio ha percorso?

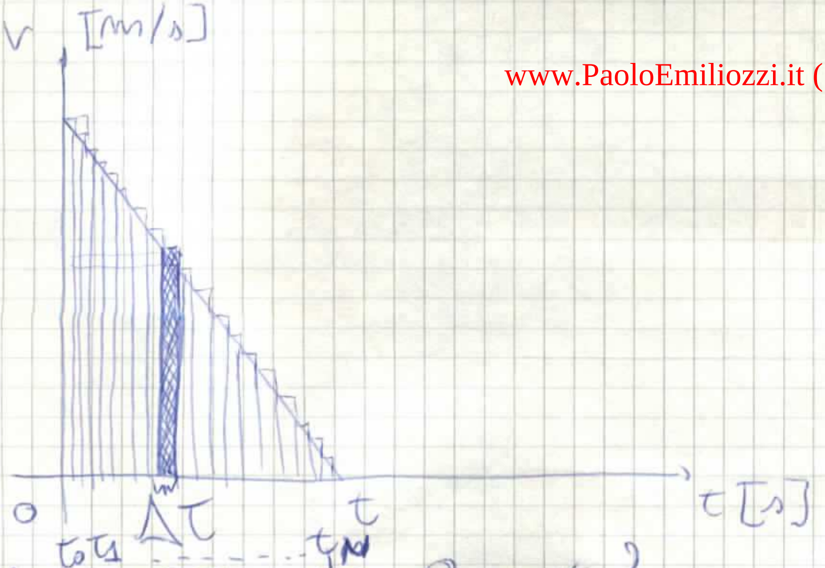
In questo caso la velocità media è uguale a quella istantanea. (v_0)

20 sec. $*$ v_0

$x(t) = v_0 t$ (area del rettangolo)

$x(t) - x(t_0) = (t - t_0) v_0$ Spazio percorso da t a t_0.

$$x(t) = x(t_0) + v_0 (t - t_0)$$



Spazio percorso da 0 a t?

Si può pensare di scegliere un intervallo talmente piccolo tale che la velocità all'interno di quell'intervallo è costante (si può applicare la regola precedentemente trovata)

$$\begin{cases} x(t_1) - x(t_0) = v(t_0)\Delta t \\ x(t_2) - x(t_1) = v(t_1)\Delta t \\ \quad\vdots \\ x(t_N) - x(t_{N-1}) = v(t_{N-1})\Delta t \end{cases}$$

Con la regola che

$$x(t) - x(t_0) = (t - t_0)\, v_0$$

La somma di tutti questi mi dà la distanza totale:

$$x(t_N) - x(t_0) = \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i)\Delta t$$

se $\Delta t \to 0$ $\quad t_N = t_{N-1}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i)\Delta t = \int_{t_0}^{t_N} v(t)\, dt$$

Dunque il processo che ci porta all'individuazione dello spostamento dallo grafico della velocità si effettua tramite l'integrale.

Es.

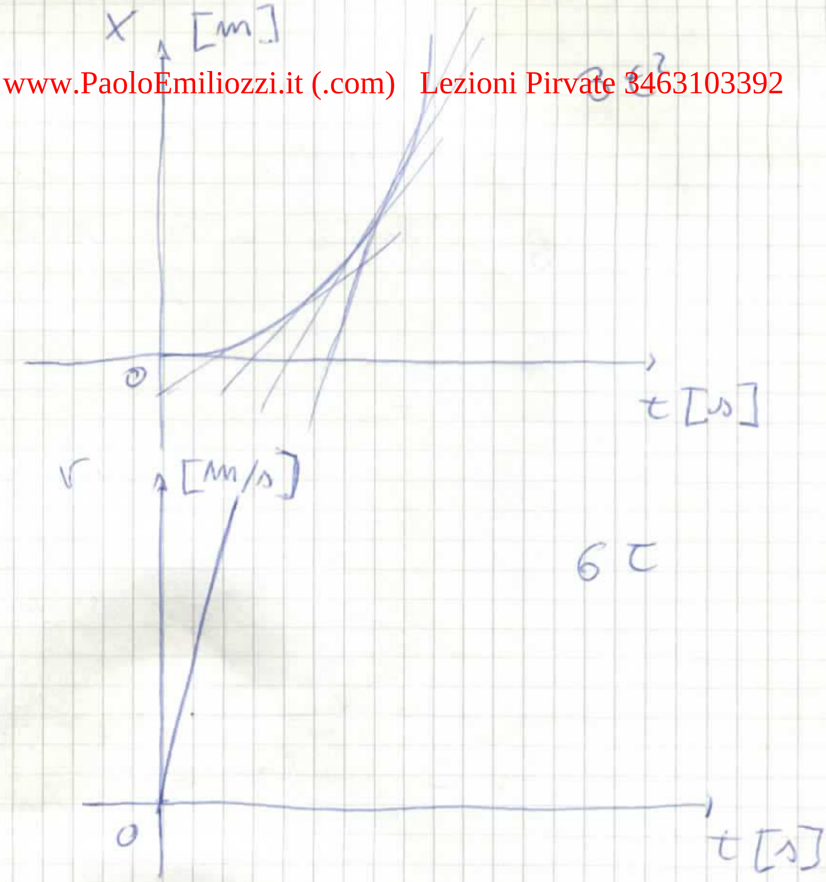
$v(t) = 3\ m/s \qquad t_0 = 0 \qquad t_1 = 10\ s$

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt = 3\int_0^{10} dt = 3\left[t\right]_0^{10} = 30\ m$$

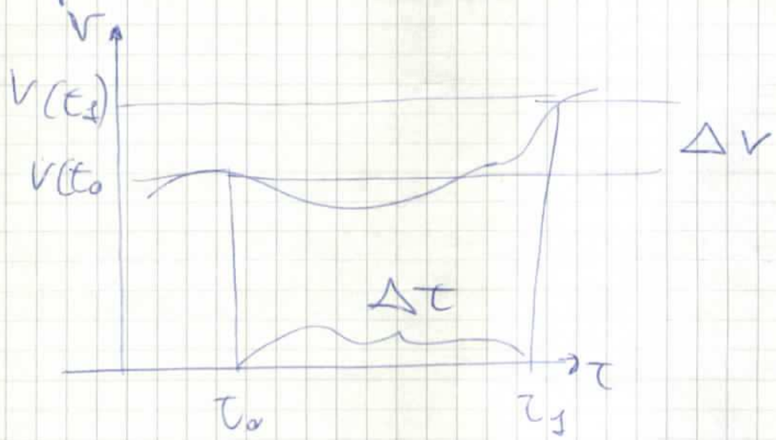
$x = x(t)$

$x(t) = 3t^2$

$v(t) = 6t$



Nella cinematica oltre a come varia lo spostamento nel tempo interessa anche come varia la velocità nel tempo.



$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ Variazione media della velocità in Δt $\frac{m/s}{s} \equiv m/s^2$

Tanti metri al secondo ogni secondo

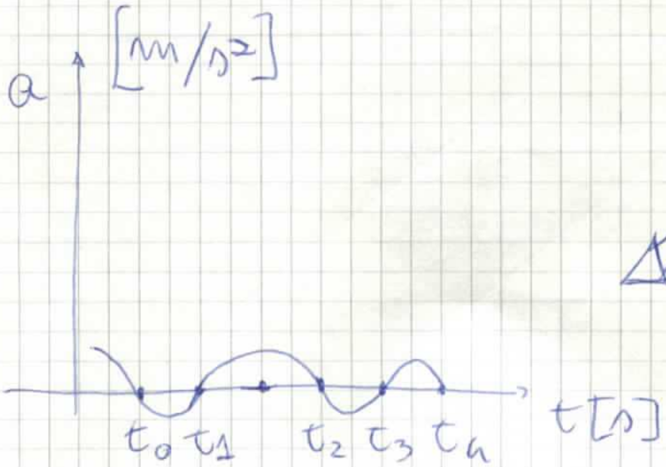
ACCELERAZIONE: Variazione della velocità

$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\,v(t)}{dt}$

$x(t) = 3t^2\ m$

$v(t) = 6t\ m/s$

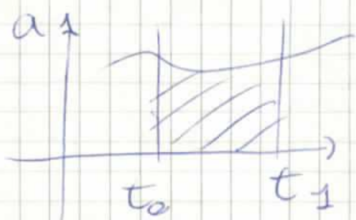
$a(t) = 6\ m/s^2$ accelerazione costante.



* Dall'accelerazione si vuole passare alla posizione. *

$a = a(t)$

$$v(t_1) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt$$



Fissiamo solo l'istante iniziale; t_0

$t_1 = t$ generico : → Costante arbitraria del processo di integrazione

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

IMPORTANTE

* Es. $a(t) = 6\ m/s^2 \equiv a$; è necessario sapere $v(t_0)$

$t_0 = 0 \quad v(t_0) \equiv v_0 = 5\ m/s$

Se $t_0 = 0$

$$v(t) = v_0 + a\int_0^t dt = v_0 + a\,t$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$x(t_0)$ è fondamentale per ricavare la posizione finale

$x(t_0) \equiv x_0$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

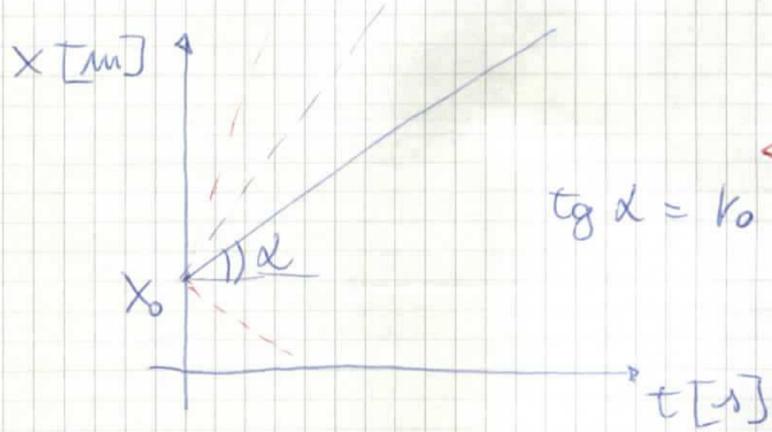
$t_0 = 0$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a\tau)\,d\tau = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

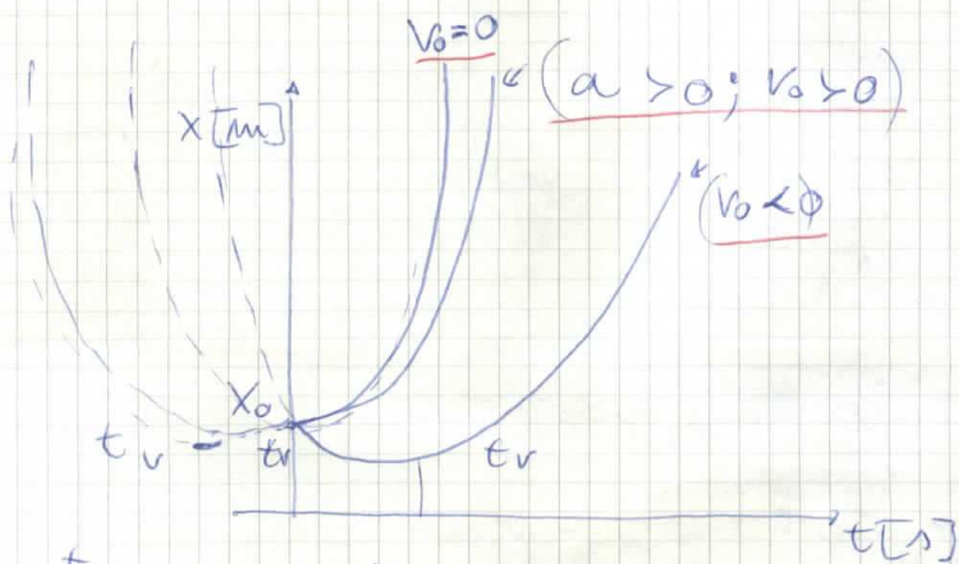
Relazione che lega posizione con accelerazione una volta fissata la velocità e la posizione iniziale

se $v(t)$ costante $\xrightarrow{} a=0$; $x(t) = x_0 + v_0 t$

EQUAZIONE ORARIA DEL MOTO RETTILINEO UNIFORME



$x(t) = x_0 + v_0 t$



$t_v = -\frac{v_0}{a}$

$t_v = 0$ se $v_0 = 0$

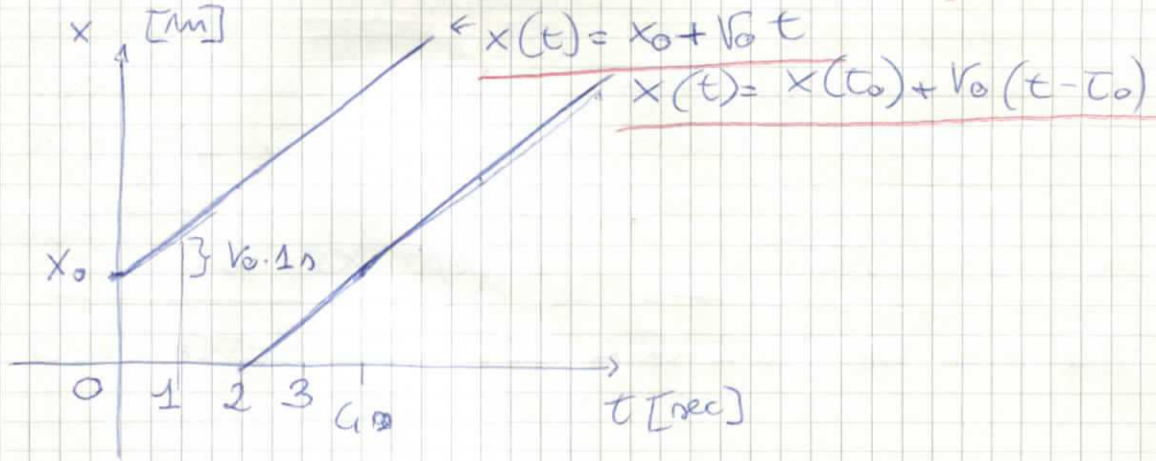
t_v: istante in cui la velocità è 0. (Vertice della parabola)

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$a(t) = 0$

$v(t) = v(t_0) = V_0$

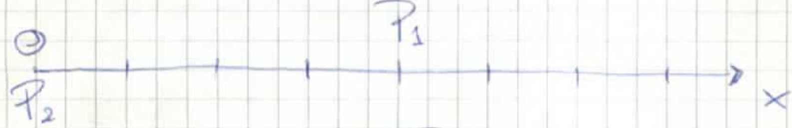
$$x(t) = x(t_0) + V_0 \left[t \right]_{t_0}^{t} = x(t_0) + V_0 (t - t_0)$$



$t_0 = 4$ sec.

$X(t_0) = X_0$

ESERCIZIO



$t_{10} = 0$ sec $\begin{cases} X_{10} = 4 \text{ m} & P_1 \\ V_{10} = 3 \text{ m/s} \end{cases}$

$t_{20} = 2$ sec $\begin{cases} X_{20} = 0 & P_2 \\ V_{20} = 5 \text{ m/s} \end{cases}$

Dopo quanto P_2 raggiunge P_1?

$$\begin{cases} X_1(t) = X_{10} + V_{10}(t - 0) = X_{10} + V_{10} t \\ X_2(t) = 0 + V_{20}(t - t_{20}) = V_{20}(t - t_{20}) \end{cases}$$

$x_{10} + v_{10} t = v_{20} t - v_{20} t_0$

$(v_{10} - v_{20}) t = - x_{10} - v_{20} t_0$

$$t^* = \frac{-x_{10} - v_{20} t_0}{v_{10} - v_{20}} = \frac{-4 - 10}{3 - 5} = 7 \text{ secondi}$$

$$\frac{m}{m/s} = s \quad \text{eq. dimensionali.}$$

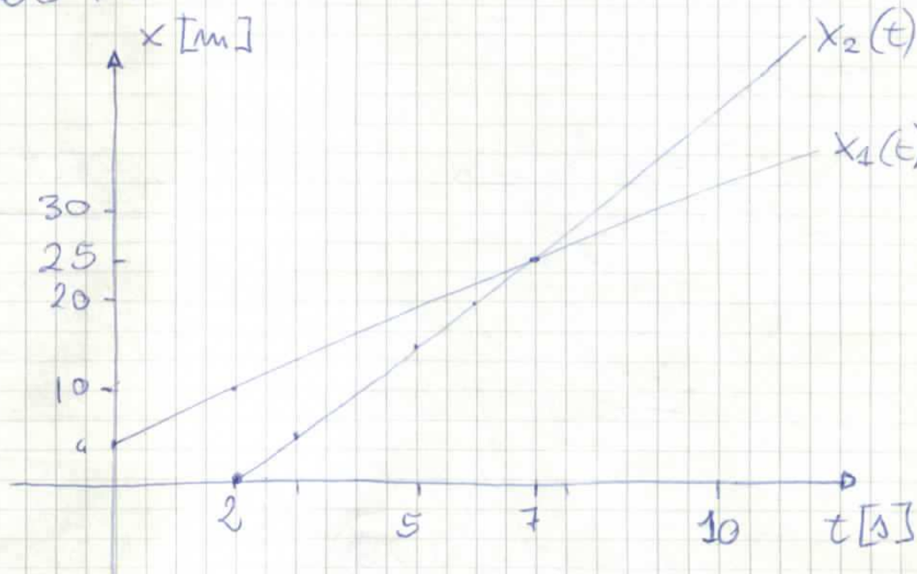
a che distanza ?

$x^* = 4 + 3(7) = 25 \text{ m}$

RISOLUZIONE GRAFICA

$x_1 = 4 + 3t$

$x_2 = 5(t-2)$



MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$a(t) = a$ (costante)

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau = v(t_0) + a(t - t_0)$$

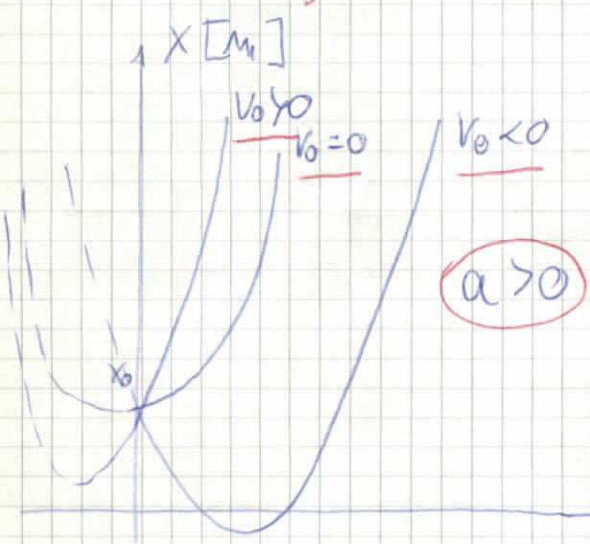
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [v(t_0) - a t_0 + a\tau]\,d\tau =$$

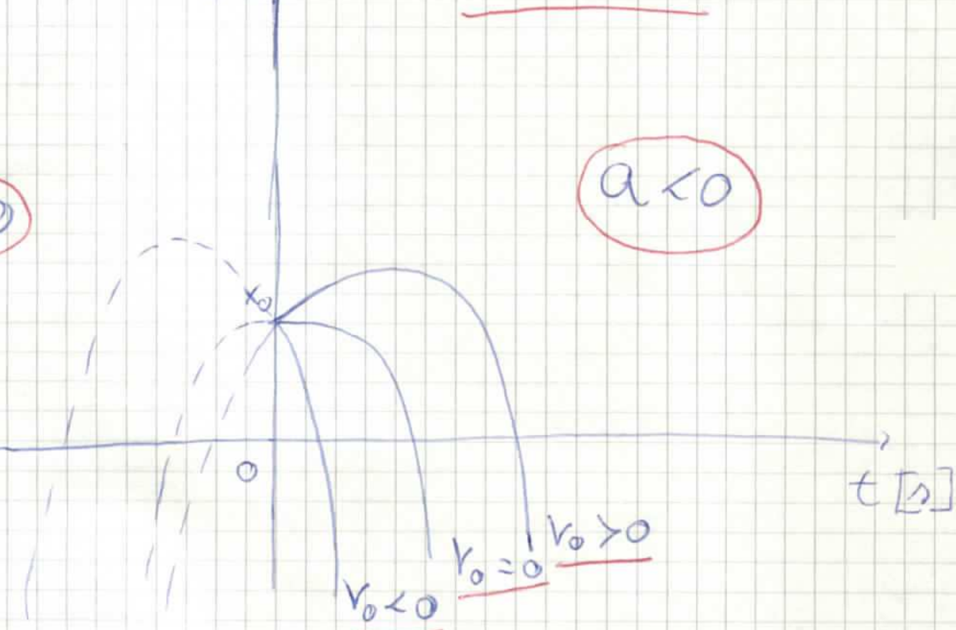
$$= x(t_0) + [v(t_0) - a t_0](t - t_0) + \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2)$$

$$= x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\tau_v = -\frac{v_0}{a}$$

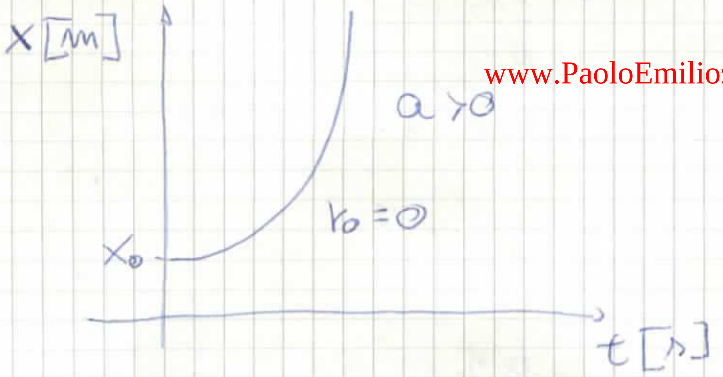




ESERCIZIO: risolvere analiticamente e geometricamente

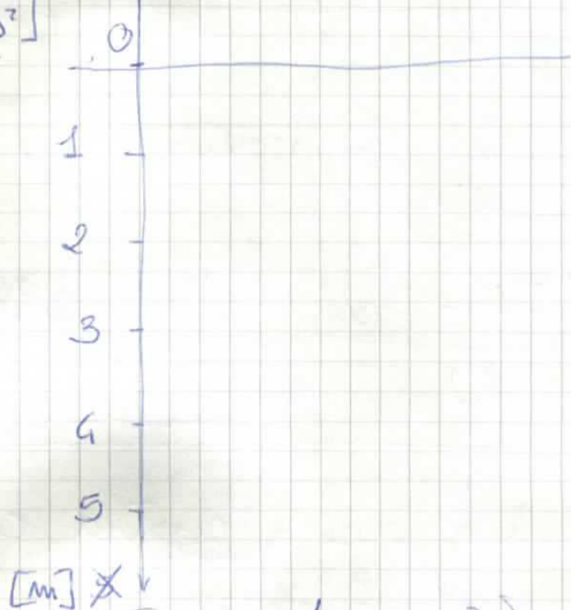
P_1 $\begin{cases} t_{10} = 0 \\ v_{10} = -2 \text{ m/s} \\ a_1 = 1 \text{ m/s}^2 \\ x_{10} = 5 \text{ m} \end{cases}$

P_2 $\begin{cases} t_{20} = 1 \text{ sec} \\ x_{20} = 6 \text{ m} \\ v_{20} = \text{[illegible]}3 \text{ m/s} \\ a_2 = 0{,}5 \text{ m/s}^2 \end{cases}$

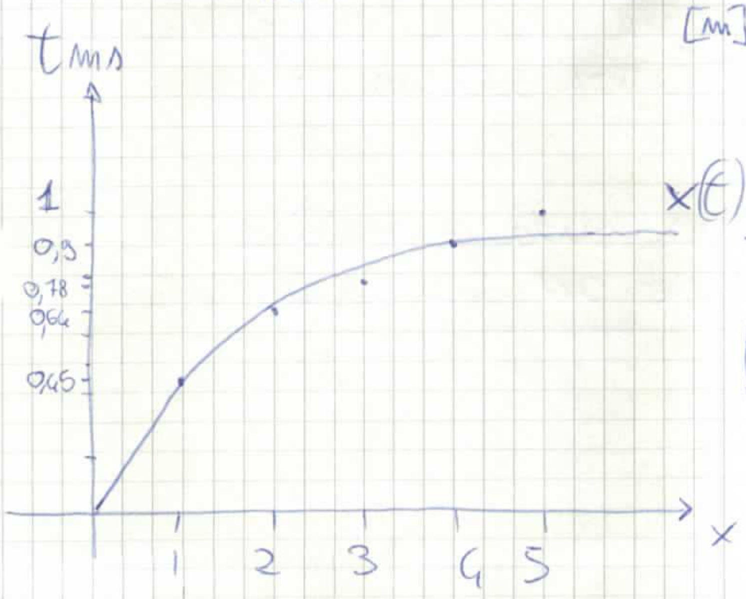


ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ : $g = 9,8\ m/s^2$

x [m]	t [s]	g [m/s²] misurati
1	0,45	9,87
2	0,64	9,76
3	0,78	9,86
4	0,9	9,87
5	1,0	10,00



$$g_{medio} = \frac{\sum_{i=1}^{m} g_i^{\text{misurati}}}{m} = 9,87$$



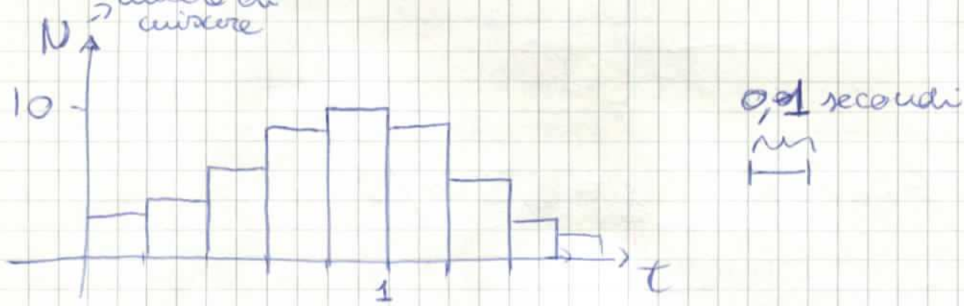
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \\ t = \sqrt{\frac{2x}{g}} \\ g = \frac{2x}{t^2} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g_{medio} t^2$$

5 m 1 secondo

Ripetendo la misura si ottengono:

secondi 1; 1,1; 0,9; 0,98; 1,02



Ci interessa lo scostamento della misura dal valore medio;

$$a = \frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{N}$$

deviazione quadratica media

SCOSTAMENTO QUADRATICO MEDIO

La qualità della nostra misura si migliora migliorando la qualità della misura (miglioramento tecnologico; sostituiamo i fattori alteranti con apparecchi idonei.)

ERRORE SISTEMATICO (Ad es. onda acustica che viaggia ad una certa velocità)

*

$a(t) = 3t^2$ m/s   m/s²

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} 3t^2\, dt = v(t_0) + 1(t^3 - t_0^3)$$

ACCELERAZIONE PROPORZIONALE ALLA VELOCITÀ

$$a(t) = -b\, v(t)$$ (ad esempio l'attrito dell'aria) $b > 0$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt = v(t_0) - b\int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$$

non possiamo passare dall'accelerazione alla velocità con l'integrazione diretta.

$$\frac{d\,v(t)}{dt} = -b\, v(t)$$

Equazione differenziale: lega la funzione con la sua derivata; lineare perchè $v(t)$ compare con esponente unitario; del 1° ordine perchè compare la derivata prima; a coefficienti costanti.

SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

$$\frac{d\,v(t)}{v(t)} = -b\, dt$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\,v(t)}{v(t)} = -b\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\Big[\ln v(t)\Big]_{t_0}^{t} = -b\Big[t\Big]_{t_0}^{t}$$

$$\ln v(t) - \ln v(t_0) = -b(t - t_0)$$

$$\ln\left[\frac{v(t)}{v(t_0)}\right] = -b(t - t_0)$$

$$e^{f(t)} = e^{g(t)}$$

Per la biunivocità della funzione esponenziale.

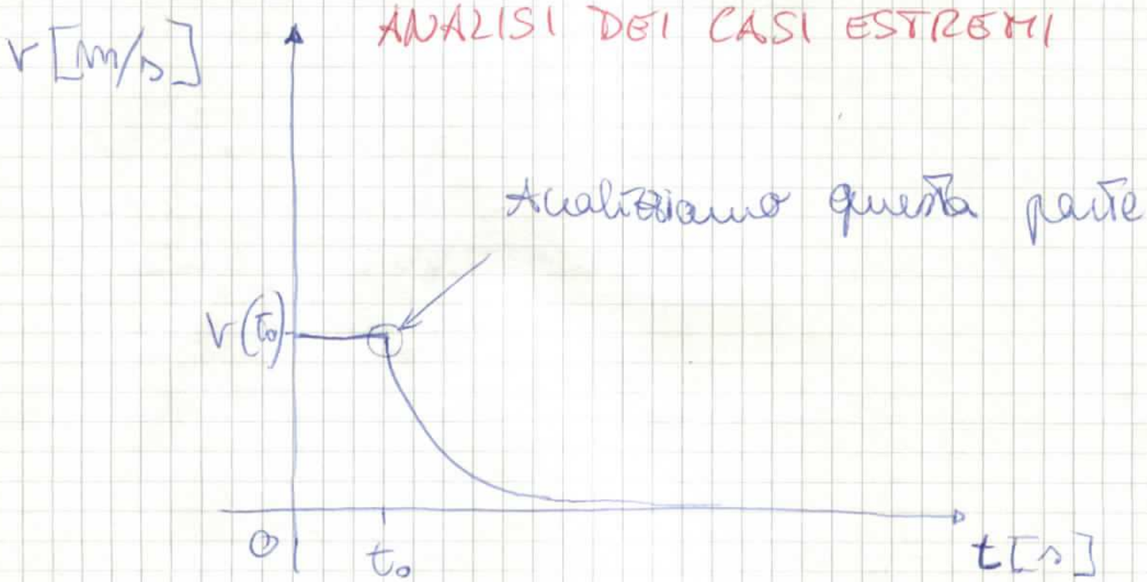
$$f(t) = \ln\left[\frac{v(t)}{v(t_0)}\right] \qquad g(t) = -b(t-t_0)$$

$$\frac{v(t)}{v(t_0)} = e^{-b(t-t_0)}$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0)\, e^{-b(t-t_0)}}$$

La velocità diminuisce nel tempo con legge esponenziale.

ANALISI DEI CASI ESTREMI



$$b(t-t_0) << 1$$

$$e^x \sim 1+x$$

Primo termine dello sviluppo in serie di Taylor.

$$\Downarrow \qquad x << 1$$

$$e^{-b(t-t_0)} \sim 1-b(t-t_0)$$

$$v(t) \sim v(t_0) - v(t_0)\, b(t-t_0)$$

Espressione del moto uniformemente accelerato con

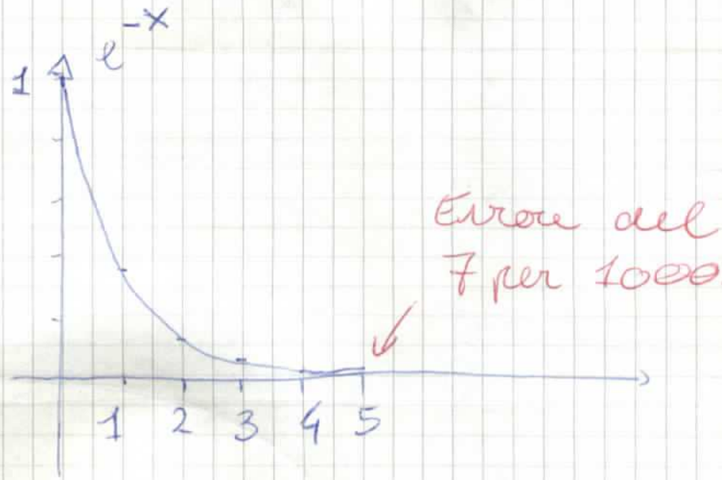
$$a = -v(t_0)\, b$$

Condizione asintotica

$$b(t-t_0) \gg 1$$

$$v(t) = v(t_0)\, e^{-b(t-t_0)}$$

x	e^{-x}
0	1
1	0,37
2	0,13
3	0,05
4	0,02
5	0,007



In tutti i processi che hanno andamento esponenziale è sufficiente arrivare a 5 per avere un andamento asintotico.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x(t_0) + v(t_0)\, e^{bt_0} \int_{t_0}^{t} e^{-bt}\,dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)\, e^{bt_0} \left[\frac{e^{-bt}}{-b} \right]_{t_0}^{t} =$$

$$x(t) = x(t_0) - v(t_0) \frac{e^{bt_0}}{b} \left(e^{-bt} - e^{-bt_0} \right)$$

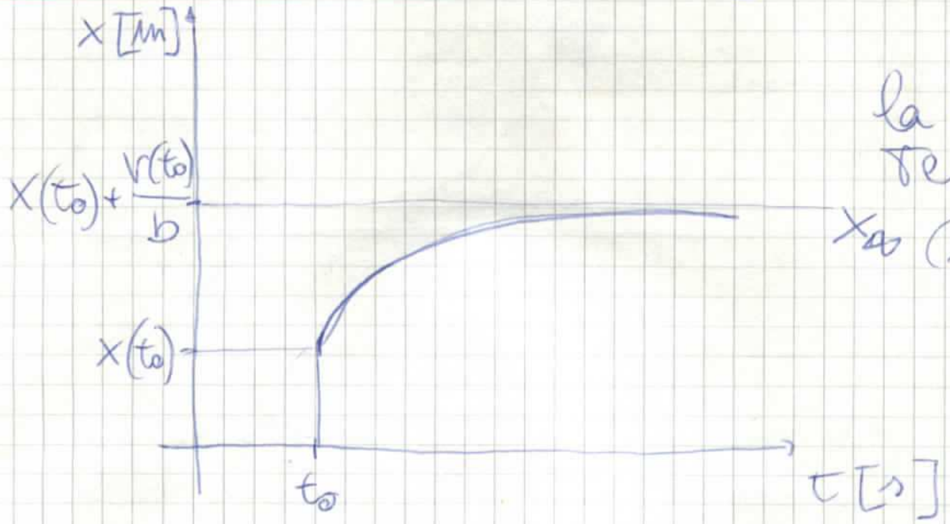
$$x(t) = x(t_0) - \frac{v(t_0)}{b} \left[e^{b(t_0-t)} - 1 \right]$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \frac{v(t_0)}{b} \left[1 - e^{-b(t-t_0)} \right]}$$

$$x(t) = x(t_0) + \frac{v(t_0)}{b}\left[1 - e^{-b(t-t_0)}\right]$$

$t = t_0 \qquad x(t) = x(t_0)$

$b(t-t_0) \gg 1 \qquad x(t) \sim x(t_0) + \frac{v(t_0)}{b}$



la velocità (Tg Te) tende a 0.

$b(t^* - t_0) = 5$ otteniamo il valore asintotico

$$\left|\frac{x(t^*) - x_\infty}{x_\infty}\right| < 7‰$$

errore relativo

ESERCIZIO

$1\ m/s = 3,6\ km/h$

$v(t_0) = 108\ km/h$

$30\ m/s = 108\ km/h$

$b = 0,05$

Dopo quanto tempo si ferma e dove siamo?

$t^* - t = \frac{5}{b} \Rightarrow$ con una approssimazione pari al 7‰

$= 100\ s = 1\ m\ 40'$

Posizione asintotica:

$x(t_0) + \frac{v(t_0)}{b}$ ma noi partiamo da $x(t_0) \overset{=0}{}$ quindi:

$\frac{v(t_0)}{b} = \frac{30\ m/s}{0,05} = 600$ metri

*

$a(t) = -b\,v(t) + c$ (Ad esempio il gesso che cade con l'attrito dell'aria + g (accelerazione di gravità))

$\frac{dv(t)}{dt} = -b\,v(t) + c$

La velocità massima a cui arrivo si ottiene:

v_{limite} $\quad -b v_e + c = 0 \quad v_e = \frac{c}{b}$ cioè $\frac{dv(t)}{dt} = 0$

Per vedere la variazione della velocità nel tempo risolviamo l'eq. differenziale

$$\frac{d\,v(t)}{dt} = -b\left[v(t) - \frac{c}{b}\right]$$

$\frac{c}{b}$ è una costante $\quad \frac{d\,\frac{c}{b}}{dt} = 0$

$$\frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d\left[v(t) - \frac{c}{b}\right]}{dt}$$

$$\frac{d\left[v(t) - \frac{c}{b}\right]}{dt} = -b\left[v(t) - \frac{c}{b}\right]$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\left[v(t) - \frac{c}{b}\right]}{\left[v(t) - \frac{c}{b}\right]} = \int_{t_0}^{t} -b\,dt$$

$$\ln\left[\frac{v(t) - c/b}{v(t_0) - c/b}\right] = -b(t - t_0)$$

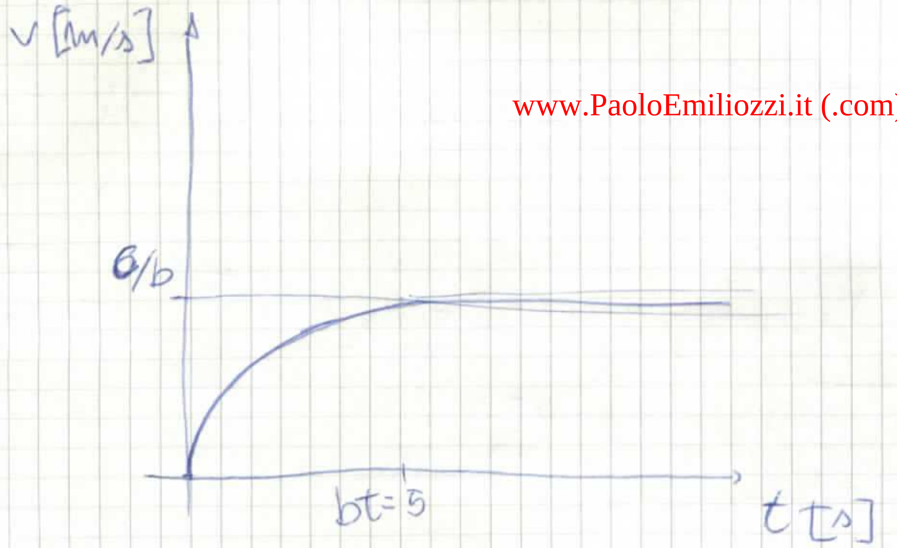
$$\frac{v(t) - \frac{c}{b}}{v(t_0) - \frac{c}{b}} = e^{-b(t-t_0)}$$

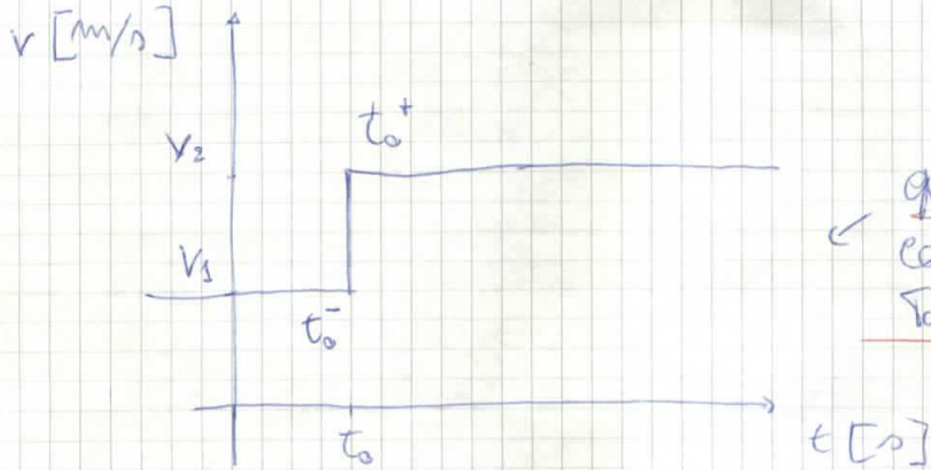
$$v(t) = \left[v(t_0) - \frac{c}{b}\right] e^{-b(t-t_0)} + \frac{c}{b}$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0)\,e^{-b(t-t_0)} + \frac{c}{b}\left[1 - e^{-b(t-t_0)}\right]}$$

$$\begin{cases} v(t_0) = 0 \quad \text{Parte da fermo} ; \quad t_0 = 0 \\ v(t) = \frac{c}{b}\left[1 - e^{-bt}\right] \qquad t = 0 \quad v(0) = 0 \end{cases}$$

$bt \gg 5 \qquad v(t) = \frac{c}{b}$ velocità limite

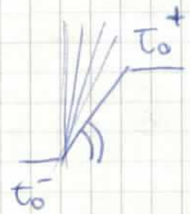




questo tempo di cambiamento di velocità non è istantaneo.

L'accelerazione dovrebbe essere infinita (da dimostrare)

Supponiamo di cambiare velocità gradualmente



$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{v_2 - v_1}^{\text{grandezza finita}}}{\Delta t} = \infty$$

(non è calcolato nel senso stretto, matematico sulla curva discontinua, ma si fa il limite)

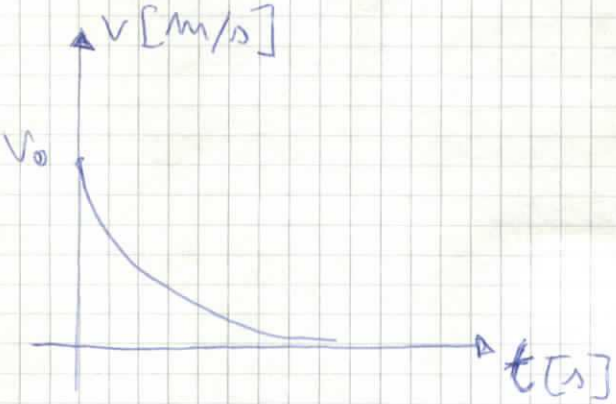
$a(t) = -b\, v(t)$

b dimensionalmente è s^{-1}

$$\frac{d v(t)}{dt} = -b\, v(t)$$

$$v(t) = V_0 e^{-bt}$$

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ v(t_0) = V_0 \end{cases}$$



$\Delta t \to 0$

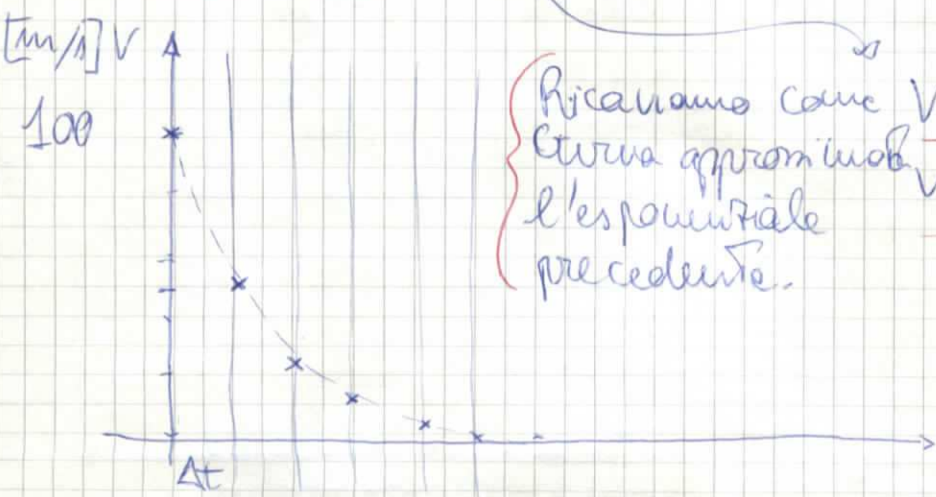
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -b\, v$$

La variazione di velocità in un intervallo molto piccolo è proporzionale alla velocità stessa.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta v}{v} = -b\, \Delta t$$

La variazione percentuale è costante nel tempo.



Ricaviamo come curva approssimata l'esponenziale precedente.

$$V(t_1) - V(t_0) = -0,5\, V(t_0)$$

$$V(t_0) - V(t_1) = 0,5\, V(t_0)$$

$$V(t_1) = 0,5\, V(t_0)$$

$\Delta t = 1$ sec. $\quad b = 0.5\ 1/s$

Ogni secondo c'è una riduzione della velocità pari al 50% ; $\frac{\Delta v}{v} = -b\, \Delta t = -0,5$

ACCELERAZIONE PROPORZIONALE ALLA POS. DEL PTO.

$$a = -\Omega^2 x$$

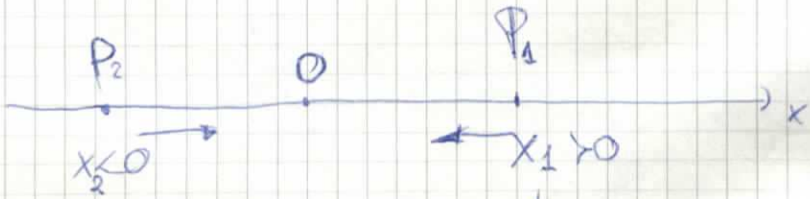
Accelerazione proporzionale alla posizione del pto.

$$\left[\Omega = \frac{1}{s}\right]$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\Omega^2 x(t)$$

importante

Eq. differenziale del **MOTO ARMONICO**



l'accelerazione tende a riportarlo verso l'origine

c'è una a che tende a riportare il pto verso l'origine

P oscilla intorno all'origine: passando per l'origine continua a "camminare" per poi tornare indietro ecc.

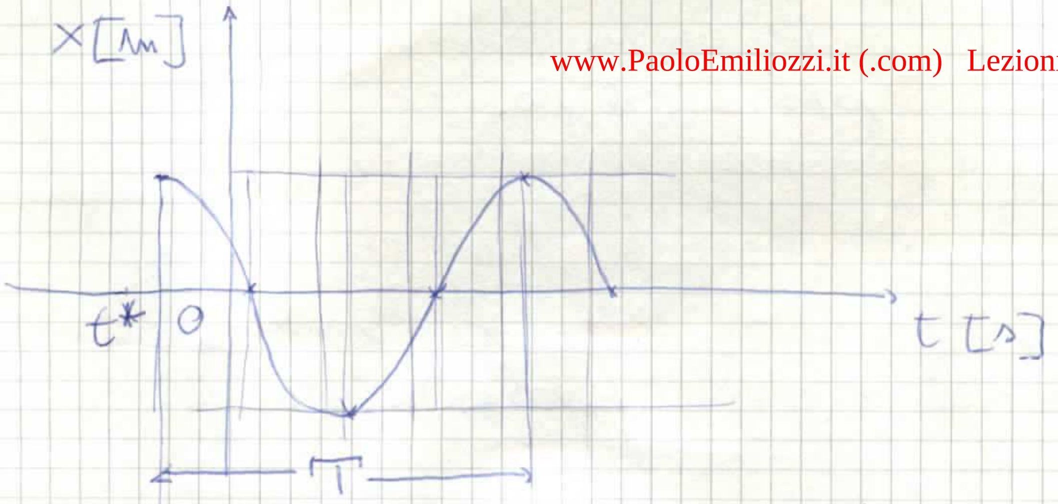
SOLUZIONE PIÙ GENERALE DEL MOTO ARMONICO

$$x(t) = x_M \cos(\Omega t + \varphi)$$

verifichiamo che è soluzione

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\Omega x_M \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\Omega^2 \underbrace{x_M \cos(\Omega t + \varphi)}_{x(t)}$$



$t = 0 \; ; \; x(0) = x_M \cos \varphi \qquad t = 0$

φ : angolo di fase

$x(t^*) = x_M \qquad t^* = -\dfrac{\varphi}{\Omega}$

Ω : PULSAZIONE DELL'OSCILLAZIONE; FREQUENZA ANGOLARE (numero di 2π variazioni di frequenza in un secondo.

$t^{**} = t^* + T \qquad x(t^* + T) = x_M$

$\Omega \left[\dfrac{-\varphi}{\Omega} + T \right] + \varphi = 2\pi \; ?$

$-\cancel{\varphi} + \Omega T + \cancel{\varphi} = 2\pi$

$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega}}$

$\Omega t^{**} + \varphi = 2\pi \qquad \boxed{t^{**} = \dfrac{2\pi - \varphi}{\Omega}}$

$T = \dfrac{1}{10} \, s$ || frequenza dell'oscillazione (numero di oscillazioni in un secondo. ||

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\Omega}{2\pi}$

{ Si potrebbero cambiare i dati ($t_0 \neq 0$) oppure ($V_0 \neq 0$) o x_0 : condizioni che dipendono dall'istante in cui io ho osservato l'oscillazione. }

Come si ricavano φ e x_M assegnate le condizioni iniziali?

$t = 0 \quad \begin{cases} x = x_0 \\ v = 0 \end{cases}$ $\qquad x(t) = x_M \cos(\Omega t + \varphi)$

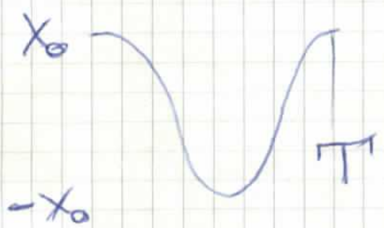
$$v(t) = -\Omega\, x_M \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x_0 = x_M \cos\varphi & \text{dalla } 1^a \text{ condizione} \\ 0 = -\Omega\, x_M \operatorname{sen}\varphi & \text{dalla } 2^a \text{ condizione} \end{cases}$$

Se l'oscillazione esiste $\Omega \neq 0$, $x_M \neq 0$ e quindi dalla 2^a eq:

$$\operatorname{sen}\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ x_0 = x_M \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = 0 \\ x_0 = x_M \end{cases}$$

Difatti se la velocità è 0 la posizione deve essere massima (come è venuto: $x_0 = x_M$)



$$x(t) = x_0 \cos \Omega t$$

$$t=0 \begin{cases} x = x_0 \\ v = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = x_M \cos(\Omega t + \varphi) \\ v(t) = -\Omega x_M \operatorname{sen} \omega t + \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = x_M \cos\varphi \\ v_0 = -\Omega x_M \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

dividendo: (la 2ª sulla prima)

$$\underline{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{v_0}{\Omega x_0}}$$

$$\begin{cases} x_0 = x_M \cos\varphi \\ -\dfrac{v_0}{\Omega} = x_M \sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\Omega}\right)^2 = x_M^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)}_{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_M = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\Omega}\right)^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{v_0}{\Omega x_0} \end{cases}$$

sviluppo di $x_M \cos(\alpha + \beta)$

$$x(t) = x_M \cos\Omega t \cos\varphi - x_M \operatorname{sen}\Omega t \operatorname{sen}\varphi$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\Omega t + \frac{v_0}{\Omega} \sin\Omega t}$$

CASO GENERALE

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\Omega^2 x(t)$$

$e^{\alpha t}$

$D^2 e^{\alpha t} \rightarrow \alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}} = -\Omega^2 \cancel{e^{\alpha t}}$

$\alpha^2 = -\Omega^2$

Possibili soluzioni potrebbero essere $e^{\alpha t}$ che derivata 2 volte risulta inalterata ed α uguale a

$$\alpha = \pm i \Omega$$

$e^{i\Omega t}$ $\quad e^{-i\Omega t}$

Non posso escludere nessuna delle due e quindi prendo una combinazione delle 2.

$$x(t) = \overset{(x_{0I})}{C_1} e^{i\Omega t} + \overset{\left(\frac{v_0}{\Omega}\right)}{C_2} e^{-i\Omega t}$$

Es.

$$t=0 \begin{cases} x_0 \\ v_0 \end{cases}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = i\Omega C_1 e^{i\Omega t} - i\Omega C_2 e^{-i\Omega t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 & \text{in } t=0 \\ v_0 = i\Omega C_1 - i\Omega C_2 = & \text{in } t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ C_1 - C_2 = \frac{v_0}{i\Omega} \end{cases} \qquad \text{Det} = -2$$

Sistema lineare (Kramer)

$$C_1 = \begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ \frac{v_0}{i\Omega} & -1 \end{vmatrix} \Big/ -2 = -\frac{x_0}{-2} + \frac{v_0}{2i\Omega} = \frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2i\Omega} = C_1$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & \frac{v_0}{i\Omega} \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{v_0}{2i\Omega} + \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2i\Omega} = C_2$$

$$x(t) = \frac{x_0}{\cancel{2}} \underbrace{\left[\frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \right]}_{\downarrow} + \frac{V_0}{\cancel{2i}\Omega} \underbrace{\left[\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} \right]}_{\downarrow}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega t) + \frac{V_0}{\Omega} \sin(\Omega t)$$

Ritrovando l'analoga formula ricavata utilizzando $x(t) = x_M(\cos \Omega t + \varphi)$.

CINEMATICA P.M. SU UNA RETTA

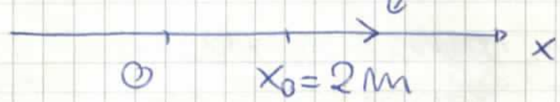
$t_0 = 0 \quad x_0, v_0$: condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t) = x_M \cos(\Omega t + \varphi) \\ x_M = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)^2} \ , \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-v_0}{\Omega x_0}\right) \end{cases}$$

$$\left\{ x(t) = x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0}{\Omega} \operatorname{sen} \Omega t \right.$$

Posizione e velocità iniziali alterano la "forma" della curva; dalla seconda $x(t)$ se $v_0 = 0$ allora $x(t) = x_0 \cos \Omega t$; se $x_0 = 0$ allora $x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \operatorname{sen} \Omega t$. ; se $x_0 \neq 0$ e $v_0 \neq 0$ allora la curva risulterà una combinazione delle due curve.

verso destra perché $v_0 > 0$



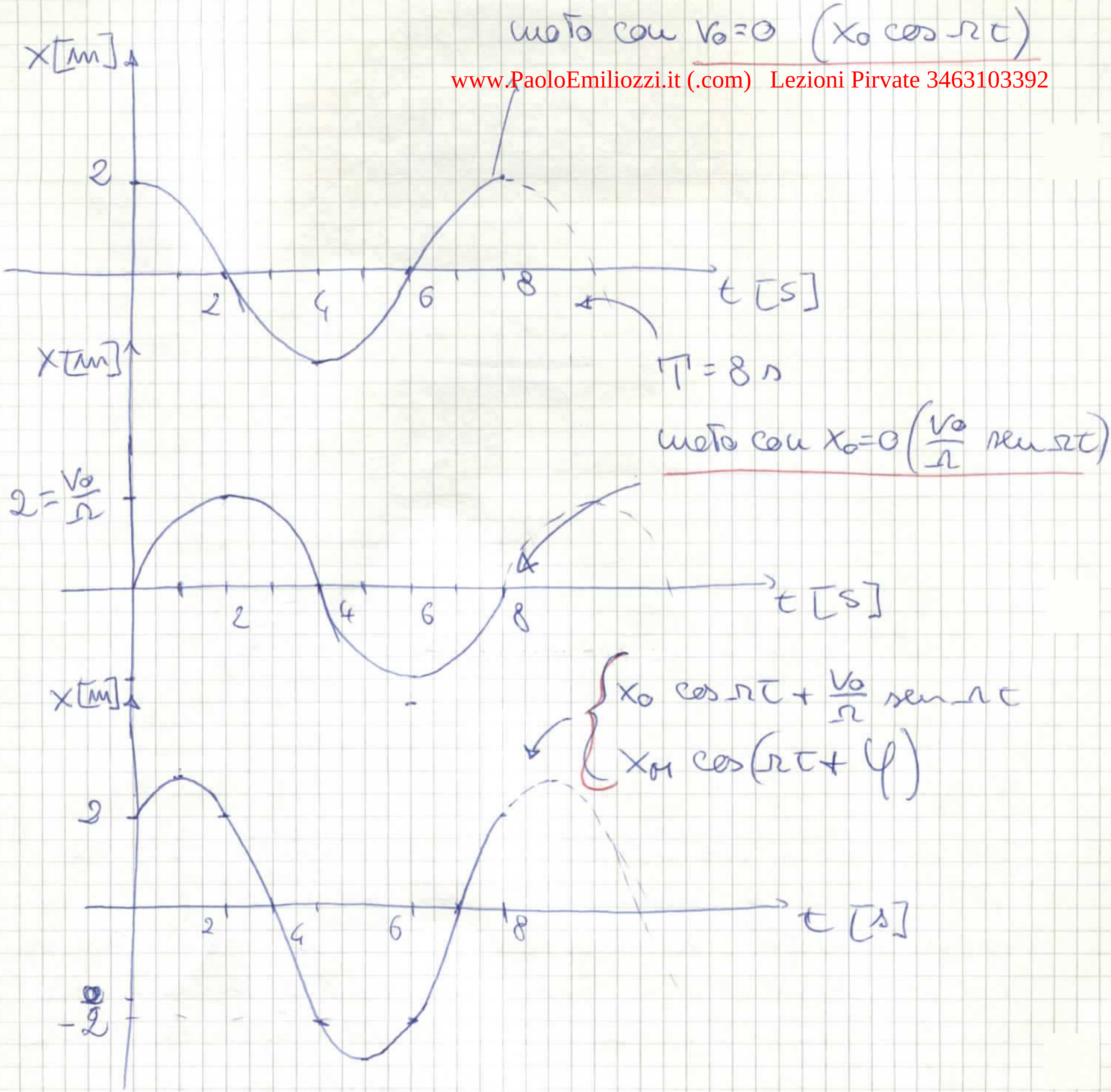
$T = 8\,s$

$t_0 = 0 \qquad v_0 = 2\,\Omega \ m/s$

$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 0{,}8 \implies v_0 \overset{\sim}{=} 1{,}6 \ m/s$

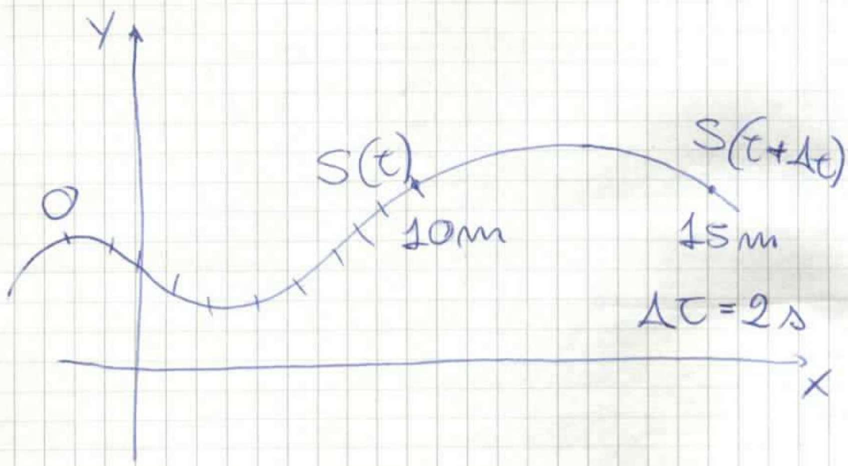
Il pto è però decelerato

Se si dà la velocità iniziale non uguale a 0 x_0 non potrà essere il valore massimo e quindi la forma non potrà essere un coseno (che parte con il suo valore massimo)



La 3ª la otteniamo come somma delle precedenti: ed è la curva soluzione cercata

CINEMATICA P.M. NEL PIANO (MOTO PIANO)



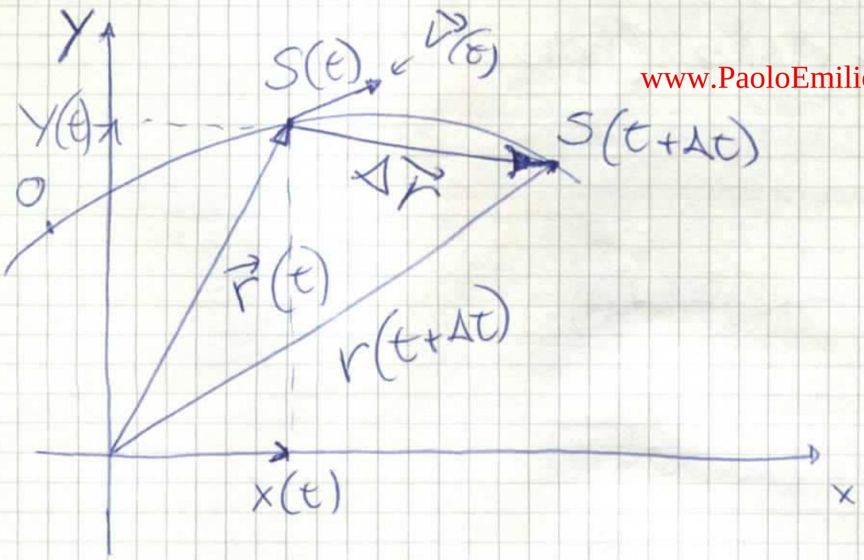
S(t) individua la posizione dando la distanza da un pto fissato come origine.

S(t) : ASCISSA CURVILINEA (nel moto rettilineo X ed S coincidono)

$$\bar{v}_s = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Spazio percorso / Intervallo di tempo impiegato per percorrerlo.

$$v_s(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



$\vec{i}$ $\uparrow \vec{j}$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\,\vec{i} + y(t+\Delta t)\,\vec{j}$$

$$\vec{r}(t) + \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\Delta \vec{r}| = \Delta s$$

ampiezza

L'arco di curva si identifica con il segmento congiungente S(t) e S(t+Δt).

VELOCITÀ VETTORIALE

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$|\vec{v}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_s(t)$$

L'ampiezza del vettore è uguale proprio alla velocità calcolata lungo la traiettoria (che è curvilinea).

nel limite di $\Delta t \to 0$ $\vec{v}(t) \equiv$ tg.te alla traiettoria.

v_s è un numero $\vec{v}(t)$ due uno i ampiezza direzione verso

$\vec{v}(t)$ $\begin{cases} \text{ampiezza} = v_s \\ \text{direzione} = \text{tangente alla traiettoria} \\ \text{verso} = \text{in direzione del moto} \end{cases}$

↓

VETTORE

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \vec{j} \right] =$$

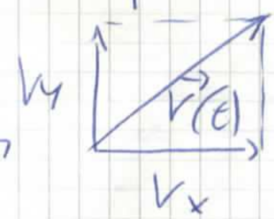
$\Updownarrow$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j}$$

Velocità lungo gli assi del p.to (moto piano ricondotto alla somma di due moti rettilinei)

Basta osservare il moto del p.to sugli assi (proiezioni)

ampiezza $|\vec{v}(t)| = v_s$



$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = v_s$$

In maniera analoga si va a definire l'accelerazione vettoriale.

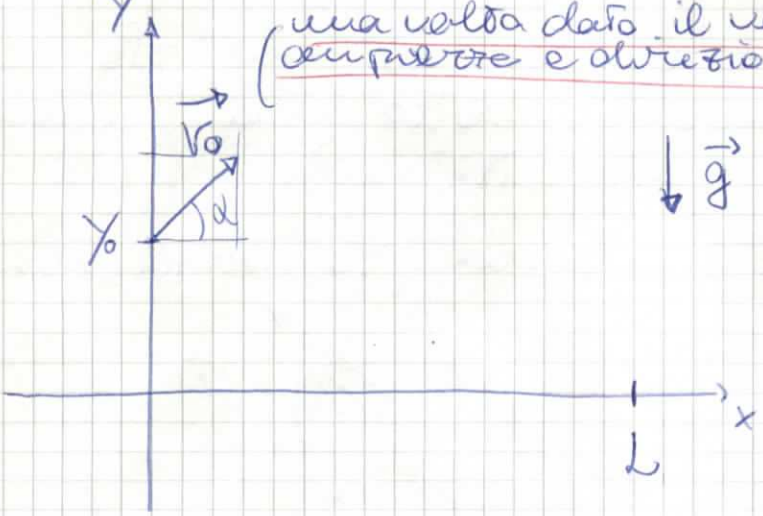
$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{V_x(t+\Delta t) - V_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{V_y(t+\Delta t) - V_y(t)}{\Delta t} \vec{j} \right]$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j}$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = a_s(t)$$

ESERCIZIO



(una volta dato il vettore abbiamo ampiezza e direzione)

$\downarrow \vec{g}$

Trascurato l'attrito dell'aria

$t_0 = 0$

$\begin{cases} \text{Nella direzione } x \text{ il moto è rettilineo uniforme } (a_x = 0) \\ \text{" " } y \text{ " " è uniformemente accelerato } (\vec{g}) \end{cases}$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad t_0 = 0 \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x} t = V_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_0 + V_0 \sin\alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

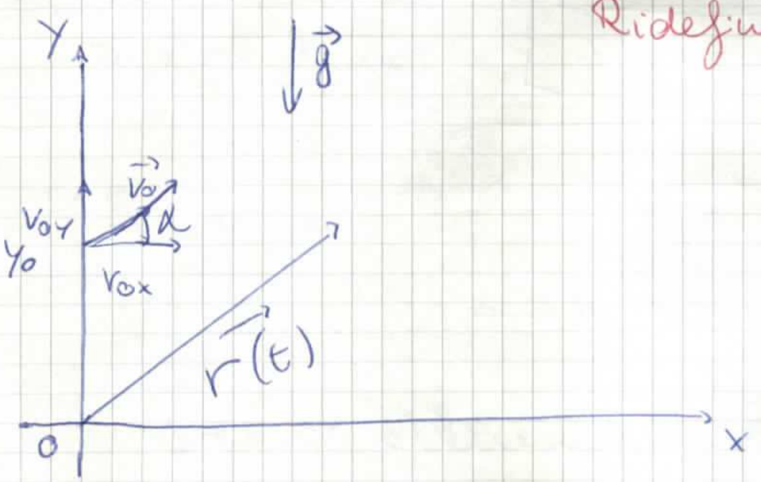
Moto delle proiezioni del p.to materiale sui due assi.

$y(t) = 0 \Rightarrow t^*$

$x(t^*)$ dove l'oggetto è caduto

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ y(t) = y_0 + v_{0y} \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \dots \end{cases}$$

Ridefinizione del problema



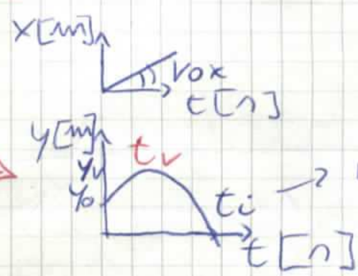
$$t_0 = 0 \quad \begin{cases} \vec{v_0} = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j} \\ \vec{r_0} = y_0\,\vec{j} \end{cases} \qquad \vec{a} = -g\,\vec{j}$$

$\vec{r}(t)$?

Scomponiamo in 2 problemi semplici

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}\, t & \Longrightarrow \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \dfrac{g}{2} t^2 & \Longrightarrow \end{cases}$$



$t_i \rightarrow$ istante dell'impatto

$$t_v = \frac{-V_{0y}}{-g} = \frac{V_{0y}}{g}$$

Istante in cui l'oggetto raggiunge la massima quota

$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha$$

$$t_v = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

La massima quota dipende dall'angolo di gittata.

$$t_i = -\frac{1}{g}\left[-V_{0y} \pm \sqrt{V_{0y}^2 + 2 g y_0}\right]$$

Istante dell'impatto con il terreno.

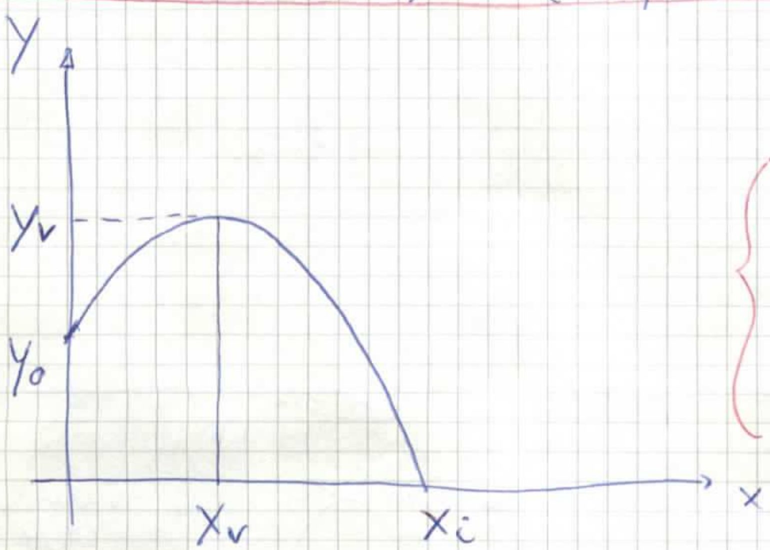
$$t_i = \frac{V_{0y}}{g}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 g y_0}{V_{0y}^2}}\right]$$

Equazione della traiettoria nello spazio.

$$t = \frac{x}{V_{0x}}$$

$$y(x) = y_0 + \left(\frac{V_{0y}}{V_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{V_{0x}^2}\right)x^2$$

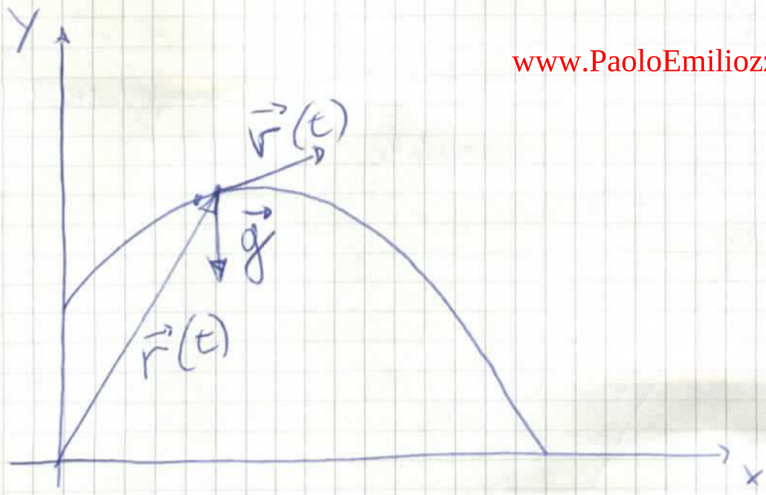
Che è una parabola.



$$\begin{cases} x_v = V_{0x} t_v \\ x_i = V_{0x} t_i \\ y_v = y(t_v) \end{cases}$$

da fare: valore massimo di x_i (l'angolo di massima gittata)

Ricavare $x_i(\alpha)$



$\vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

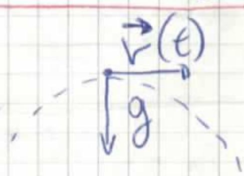
non è legato, come la velocità, alla direzione del moto

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

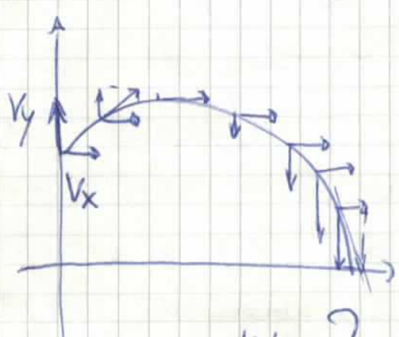
In generale l'accelerazione può avere una direzione qualunque

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$$

nel vertice



L'ampiezza del vettore $\vec{v}$ ha nel vertice un valore minimo (andando a 0 V_y ↑ $\vec{V_x}$ è costante



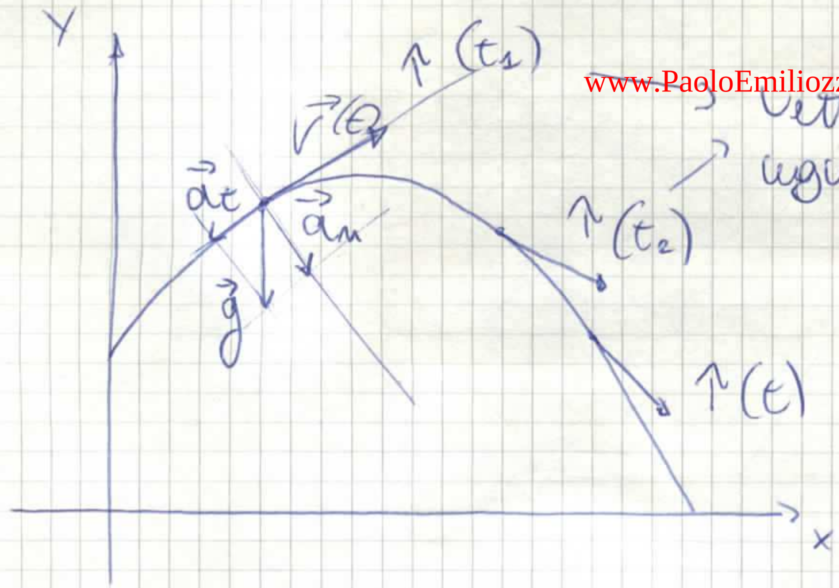
V_x è costante
V_y è accelerato con a negativo.

$$|v| = \sqrt{V_{0x}^2 + V_y^2(t)}$$

$\frac{d|v|}{dt} = 0$?

l'ampiezza non varia ma cambia la direzione del vettore

Se ho un'accelerazione perpendicolare alla traiettoria ha l'effetto di modificare la traiettoria del moto.



$\vec{a}_t$ fa variare la velocità: accelerazione TANGENZIALE

$\vec{a}_n$ fa cambiare la direzione: accelerazione NORMALE

$$\boxed{\vec{v}(t) = V_s(t)\,\hat{\tau}(t)}$$

indica la direzione

chiamando con $\hat{\tau}(t)$ il versore indicante la direzione

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dV_s(t)}{dt}\,\hat{\tau}(t)}_{} + \underbrace{V_s(t)\,\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt}}_{}}$$

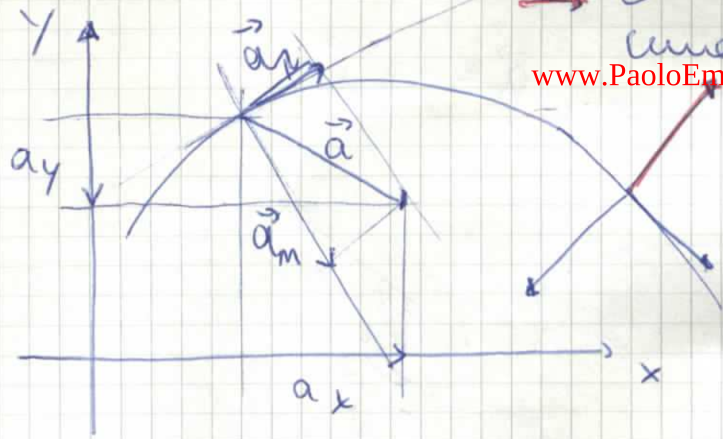
questo vettore ha direzione $\hat{\tau}(t)$ essendo $\frac{dV_s(t)}{dt}$ un numero; è quindi compatibile con la definizione accelerazione tangenziale

Come varia la velocità mantenendo inalterata la direzione
$\vec{a}_t(t)$

andremo a dimostrare che questo vettore è perpendicolare a $\hat{\tau}(t)$ giustificando la definizione di accelerazione normale:
$\vec{a}_N(t)$

DEFINIZIONI EQUIVALENTI

$$\begin{cases} \vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_N(t) \\ |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_t^2(t) + a_n^2(t)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} \\ |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} \end{cases}$$



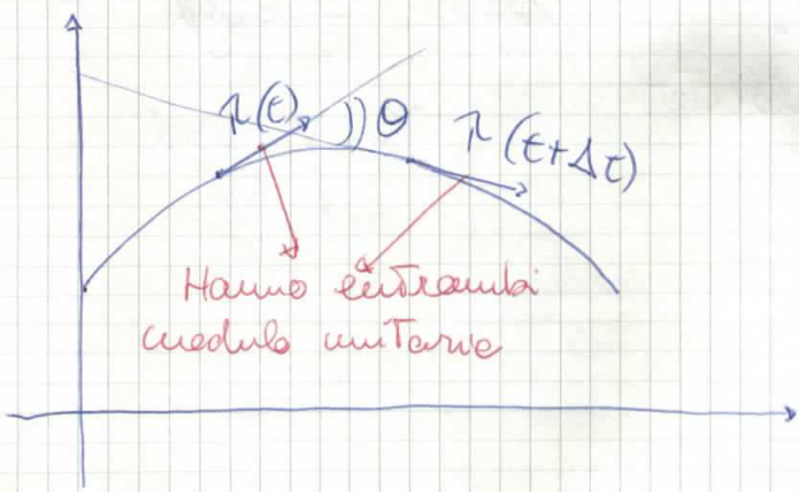
→ Sistema di assi che si muove con la traiettoria (accelerazione normale e tangenziale).

* Dimostrazione:

Dobbiamo dimostrare che:

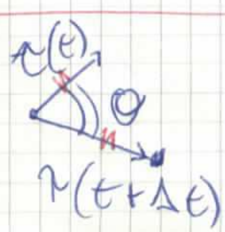
*perché è la componente normale dell'accelerazione

$\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt}$ è un vettore con direzione ortogonale a $\hat{\tau}(t)$



$\Delta\hat{\tau} = \hat{\tau}(t+\Delta t) - \hat{\tau}(t)$

triangolo isoscele: $|\hat{\tau}(t)| = |\hat{\tau}(t+\Delta t)|$
versori entrambi



$$\begin{cases} \Delta t \to 0 \\ \theta \to 0 \\ \alpha \to \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

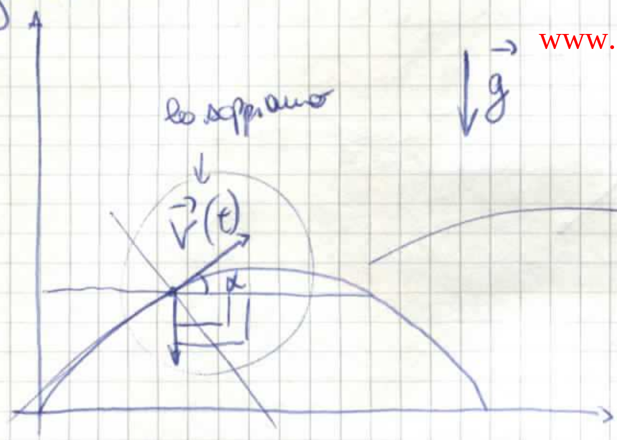
(ed essendo α l'angolo tra $\hat{\tau}(t)$ e $\Delta\hat{\tau}$ i due vettori sono ortogonali)

$\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{\tau}}{\Delta t}$ è ancora $\perp$ a $\hat{\tau}$ (perché [illegible])

C.D.D.

da fare!

$\downarrow \vec{g}$ $\qquad \vec{a} = \vec{g}$



$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

come posso esprimere $\vec{a}$ in termini di accelerazione normale e tangenziale?

$\vec{v}(t) = V_x(t)\,\vec{i} + V_y(t)\,\vec{j}$

$\dfrac{V_y}{V_x} = tg\,\alpha$

Conosciuta la velocità conosciamo α.

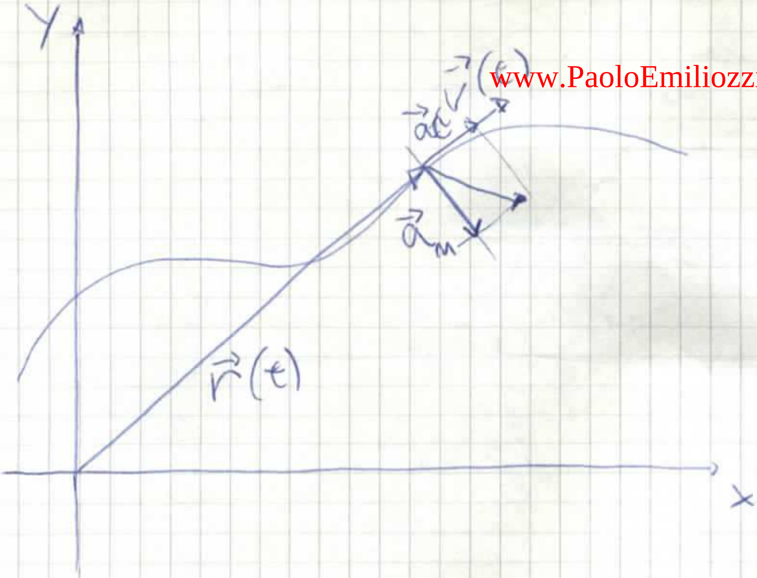
$V_x = V \cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{V_x}{V}$

$a_N = g \cos\alpha$

$a_t = g \,\text{sen}\,\alpha$

Esercizi pag 20-21-22

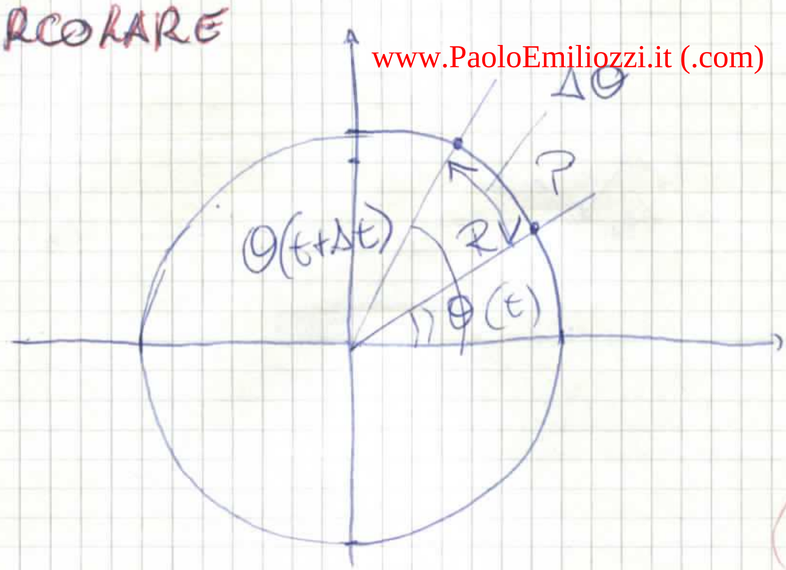


$$\begin{cases} \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \\ \vec{v}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} \\ \vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = V_s(t)\,\hat{\tau}(t)$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{d\,v_s(t)}{dt}\,\hat{\tau}(t)}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{V_s(t)\,\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt}}_{\vec{a}_n}$$

MOTO CIRCOLARE



l'angolo non ha unità di misura.

$\theta = \frac{l}{R} = \frac{m}{m}$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \text{costante} = \omega \equiv \text{VELOCITÀ ANGOLARE}$$

$\left[\frac{1}{s}\right]$ radianti al secondo

unità di misura reale

come convenzionale (per ricordare che il numero puro è un angolo)

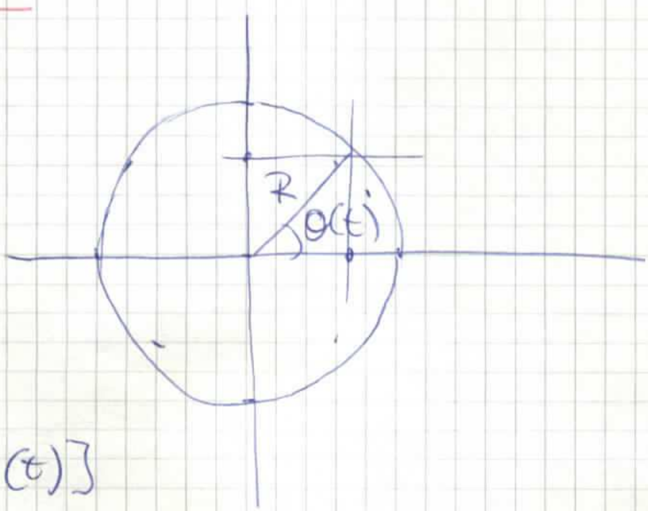
$\Delta t \qquad \Delta\theta$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{costante}$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^{t} \omega\, dt = \omega(t - t_0)$$

$t_0 = 0 \qquad \theta_0 = 0$

$$\theta(t) = \omega t$$



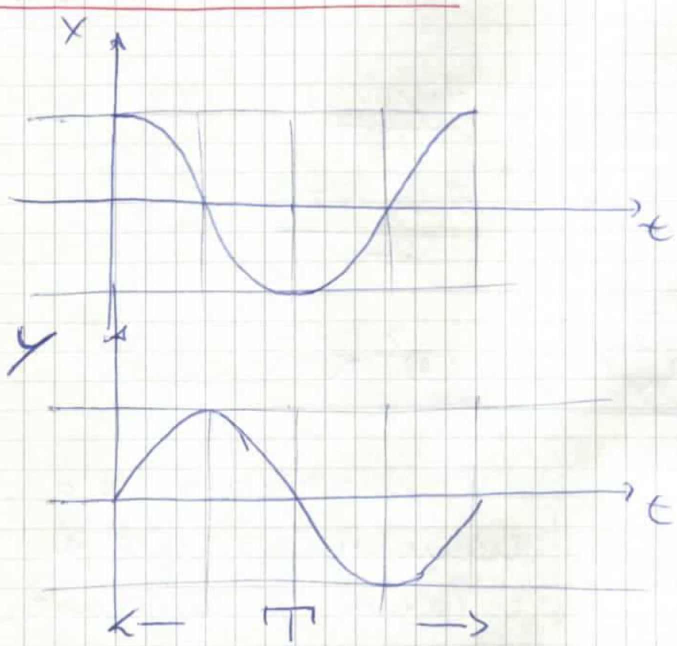
$$\begin{cases} x(t) = R\cos[\theta(t)] \\ y(t) = R\,\text{sen}[\theta(t)] \end{cases}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME $\theta(t) = \omega t$

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\,\text{sen}(\omega t) \end{cases}$$

$x(t)$ somiglia al moto armonico: infatti la proiezione del moto circolare uniforme sull'asse x è proprio il moto armonico.

$y(t)$ è in analogia



$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Moto circolare uniforme come sovrapposizione di 2 moti armonici di uguale ampiezza e periodo e sfasati di 90°.

La pulsazione (Ω) è numericamente uguale a ω

ω è una velocità perché la leghiamo all'angolo.

Ω Non era collegata a niente e quindi non potevo chiamarla come grandezza fisica.

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} \qquad \begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t) \end{cases}$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = R$$

$$\begin{cases} V_x(t) = -\omega R \sin(\omega t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ V_y(t) = \omega R \cos(\omega t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases}$$

costante nel tempo

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} = \omega R$$

VELOCITÀ SCALARE

$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos(\omega t) = \dfrac{dV_x(t)}{dt} \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin(\omega t) = \dfrac{dV_y(t)}{dt} \end{cases}$$

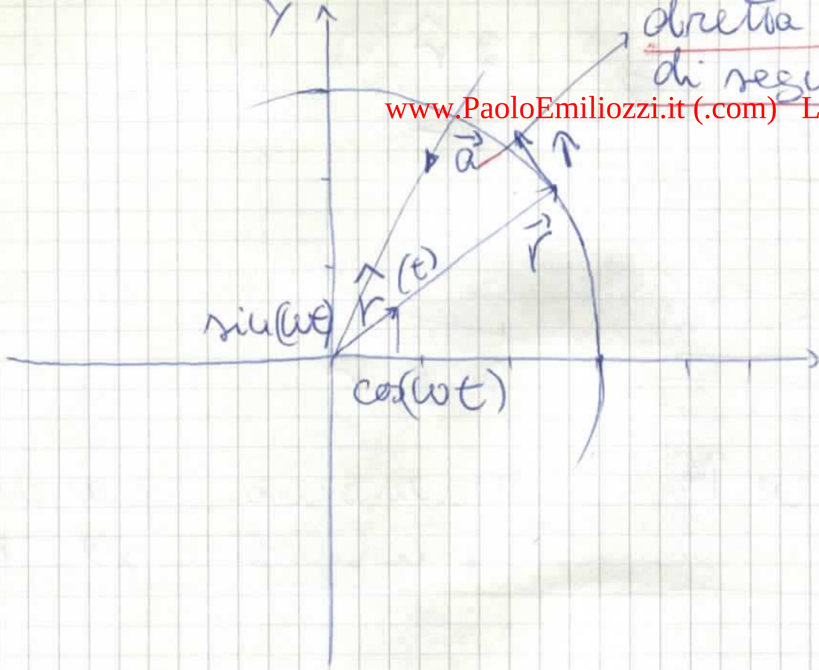
$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = \omega^2 R$$

accelerazione solo normale perché la velocità è costante (accelerazione tangenziale uguale a 0).

$$?(t) = \text{MODULO}[\text{componenti sugli assi}] = ?_x(t)\,\vec{i} + ?_y(t)\,\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = R[\cos(\omega t)\,\vec{i} + \sin(\omega t)\,\vec{j}] \\ \vec{v}(t) = \omega R[-\sin(\omega t)\,\vec{i} + \cos(\omega t)\,\vec{j}] \\ \vec{a}(t) = -\omega^2 R[\cos(\omega t)\,\vec{i} + \sin(\omega t)\,\vec{j}] \end{cases}$$

diretta lungo $\hat{r}$ cambiata di segno



$\boxed{\hat{t} = \hat{\tau}}$

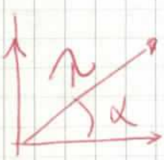
$$\hat{r}(t) = \cos(\omega t)\,\vec{i} + \sin(\omega t)\,\vec{j}$$

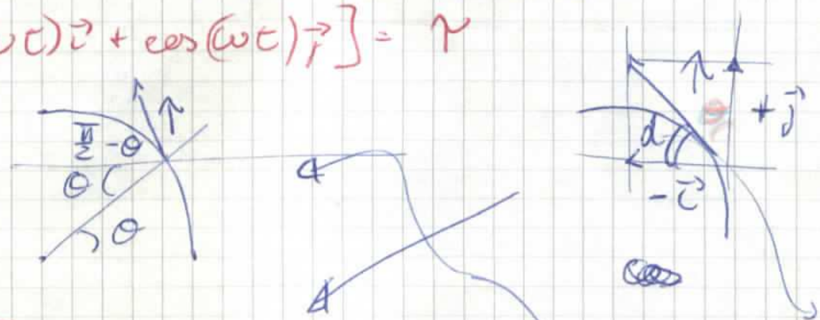
Vettore rotante

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = R\,\hat{r}(t) \\ \vec{v}(t) = \omega R\,\hat{t}(t) \\ \vec{a}_c(t) = -\omega^2 R\,\hat{r}(t) \end{cases}$$

ACCELERAZIONE CENTRIPETA: Verso il centro

Dim: TESI: $\left[-\sin(\omega t)\,\vec{i} + \cos(\omega t)\,\vec{j}\right] = \hat{\tau}$





$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \Theta$

$\Theta = \omega t$

$$\hat{\tau} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)\vec{j}$$

$$\hat{\tau} = -\sin(\omega t)\,\vec{i} + \cos(\omega t)\,\vec{j}$$

C.D.D.

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\dfrac{d\hat{r}(t)}{dt} \\ \vec{v}(t) = \omega R \hat{\tau}(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega \hat{\tau}(t)}$$

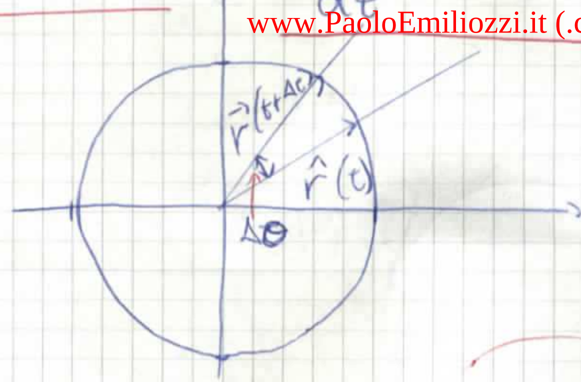
$\hat{\tau} \perp r$

otteniamo una grandezza perpendicolare ad r

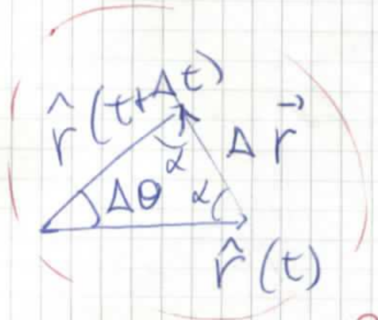
$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \omega R \dfrac{d\hat{\tau}(t)}{dt} \\ \vec{a} = -\omega^2 R \vec{r} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = -\omega \hat{r}(t)}$$

GIUSTIFICAZIONE DI: $\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega\hat{\tau}$



$$\Delta\hat{r} = \hat{r}(t+\Delta t) - \hat{r}(t)$$



facendo tendere $\left\{\begin{array}{l}\Delta t \to 0 \\ \Downarrow \\ \Delta\theta \to 0 \\ \Downarrow \\ \alpha \to \frac{\pi}{2}\end{array}\right.$ $\Longrightarrow \Delta\vec{r} \perp \hat{r}(t)$

Per giustificare la perpendicolarità ↑

{approssimando la corda con l'arco di circonferenza}

$$|\Delta\hat{r}| = R\Delta\theta = \Delta\theta$$

R = 1 perché la circonferenza è fatta con i versori.

$$\frac{|\Delta\hat{r}|}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$$

per giustificare il coefficiente ω nella formula $\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega\hat{\tau}$

GIUSTIFICAZIONE DI $\frac{d\hat{\tau}(t)}{dt} = -\omega\,\vec{r}(t)$

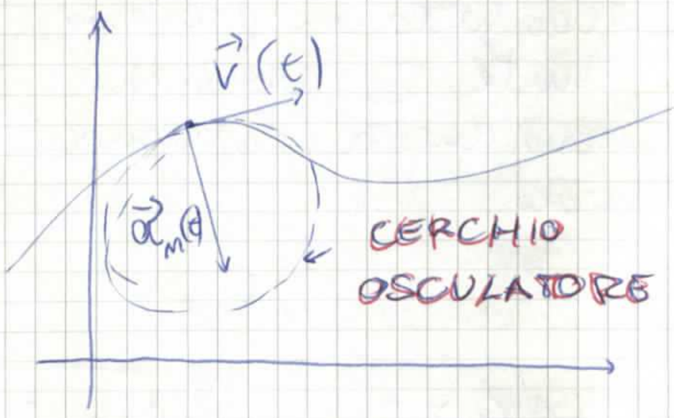
2)

$$\vec{v}(t) = \omega R \hat{\tau}(t)$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R \; \hat{r}(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}(t)| = \omega^2 R \\ |\vec{v}(t)| = \omega R \end{array}\right\} \quad |\vec{a}(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R}$$

Possiamo estenderlo al caso di traiettorie qualsiasi



in quell'istante il pto materiale sta descrivendo un arco di circonferenza (approssimando la curva con le circonferenze per intervalli molto piccoli).

Esiste una sola circonferenza tale che la velocità scalare non cambia (è quella che approssima maggiormente il moto del pto materiale nell'intorno del pto)

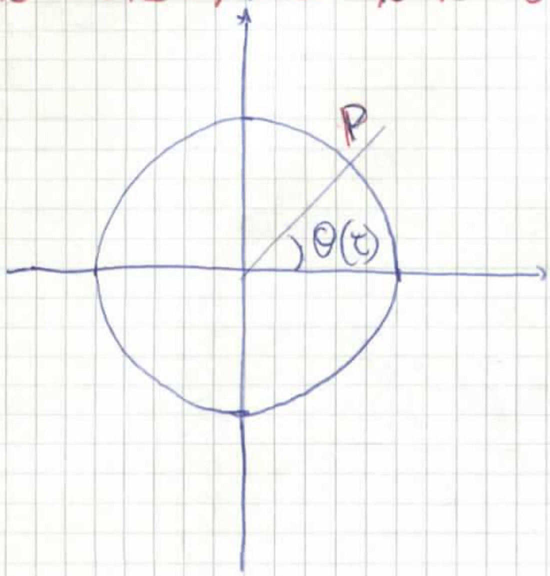
$$R = \frac{|v(t)|^2}{|a_n(t)|}$$ Raggio del cerchio osculatore

R: RAGGIO DI CURVATURA DELLA TRAIETTORIA NEL PUNTO

da fare: calcolare R (pto per pto) della traiettoria per il proiettile lanciato a 45°

$$|a_n| = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \qquad \frac{d|v(t)|}{dt} = a_\tau$$

MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME



$\theta(t)$

Essendo θ una $f(t)$ allora la velocità angolare cambia.

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega(t)\hat{t}(t) \\[2ex] \dfrac{d\hat{t}(t)}{dt} = -\omega(t)\hat{r}(t) \end{cases}$$

Avendo fatto un processo al limite le relazioni valgono ancora; espressioni generali

$$\vec{r}(t) = R\,\hat{r}(t)$$

$$\vec{v}(t) = R\,\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = R\,\omega(t)\,\hat{t}(t)$$

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega}(t)}$$

$$\vec{a}(t) = R\,\dot{\omega}(t)\,\hat{t}(t) + R\,\omega(t)\left[-\omega(t)\,\hat{r}(t)\right] = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \underbrace{R\,\dot{\omega}(t)\,\hat{t}(t)}_{a\ \text{tangenziale}} - \underbrace{R\,\omega^2(t)\,\hat{r}(t)}_{\text{direzione del raggio}}$$

R · variazione velocità angolare

a_c

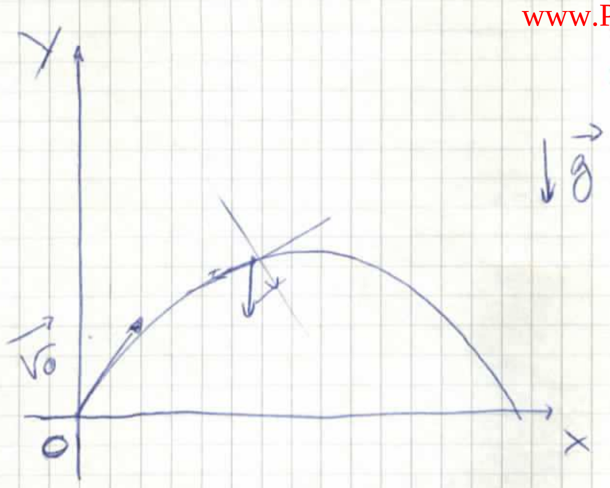
$$|a_t| = R\,\dot{\omega}(t)$$

diretta lungo la retta

$$|a_c| = R\,\omega^2(t)$$

diretta lungo il cerchio

Ricavare il raggio di curvatura in ogni punto.



$R(t)$?

$$R(t) = \frac{v^2(t)}{a_n(t)}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - g t \end{cases}$$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$$

$$v(t) = \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - g t)^2}$$

$$V(t) = \sqrt{v_0^2 - 2 v_{0y} g t + g^2 t^2}$$

ampiezza del vettore velocità

VELOCITÀ SCALARE $V_s(t)$

$$a_\tau(t) = \frac{d\, v_s(t)}{dt} = \frac{-2 v_{0y} g + 2 t g^2}{2 v(t)} = -g \frac{v_y(t)}{v(t)}$$

$$a_n(t) = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - g^2 \frac{v_y^2(t)}{v^2(t)}} = g \sqrt{\frac{v^2(t) - v_y^2(t)}{v^2(t)}}$$

$$= g \frac{v_x(t)}{v(t)}$$

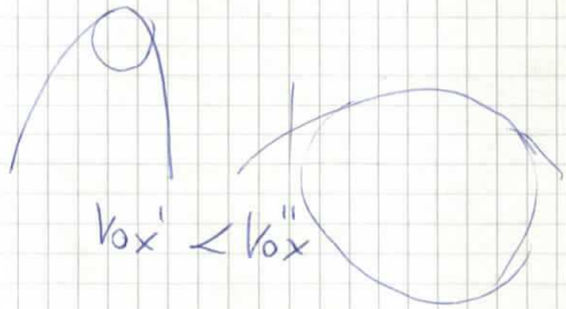
$$R = \frac{v^3(t)}{g\, v_x(t)} = \frac{v^3(t)}{g\, v_{0x}}$$

Nel vertice accade:

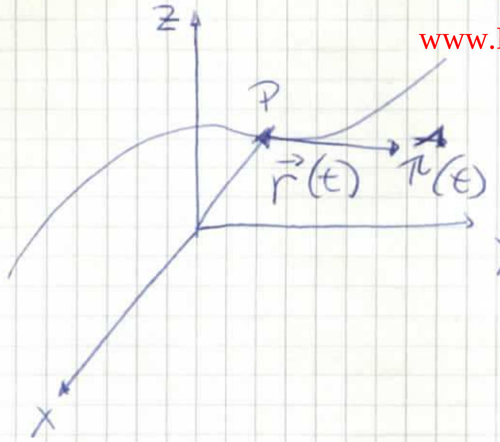
$t = t_v$

$$\begin{cases} V_y(t) = 0 \\ V_x(t) = V_{0x} \end{cases} \Rightarrow \quad V(t_v) = V_{0x}$$

$$R = \frac{V_{0x}^3}{g V_{0x}} = \frac{V_{0x}^2}{g}$$



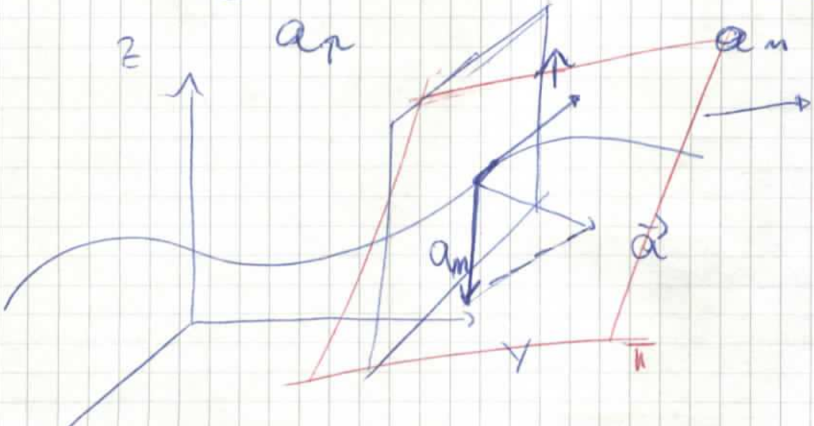
MOTI SPAZIALI



Trattazione analoga a quella dei moti piani.

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \\ \vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k} \\ \vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_x(t)\,\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = v_s(t)\,\tau(t) \\ \vec{a}(t) = \underbrace{\dfrac{dv_s(t)}{dt}\,\tau(t)}_{a_\tau} + \underbrace{v_s(t)\,\dfrac{d\tau(t)}{dt}}_{a_n} \end{cases}$$



piano sul quale la traiettoria è piana. ($\tau \subset \pi$, $a_n \subset \pi$)

Localmente la traiettoria è considerabile piana e giace nel piano definito da a_n e τ (piano rotante nel tempo) (Tratto di circonferenza infinitesima)

Definisce il piano e raggio del cerchio osculatore.