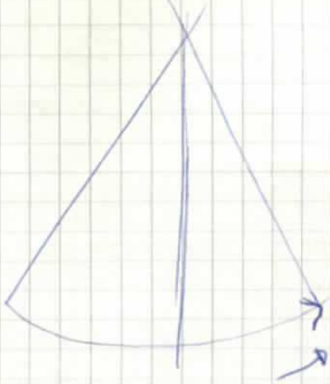
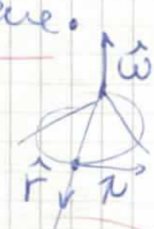


Andiamo a verificare se la formula della velocità ... a seconda del verso che essa ha in alcuni momenti dell'oscillazione;

l'angolo aumenta quindi $\dot{\theta}$ è positiva (velocità diretta verso $\hat{\tau}$)

velocità diretta verso $-\hat{\tau}$ infatti $\dot{\theta}$ è minore di 0

Quindi la formula per la velocità va bene.



$$\vec{q} = m\vec{v} = m l \dot{\theta}\, \hat{\tau}$$

$$\vec{P}_o = \vec{r}_{op} \times \vec{q} = l\hat{r} \times m l \dot{\theta}\hat{\tau}$$

$$\hat{r} \times \hat{\tau} = \hat{\omega}$$

$$\vec{P}_o = m l^2 \dot{\theta}\, \hat{\omega}$$

anche per questo momento angolare il segno è contenuto nel segno della derivata di θ; la velocità angolare $\dot{\theta}$

$$\frac{d\vec{P}_o}{dt} = \underbrace{m l^2 \hat{\omega}}_{\text{grandezze invarianti nel tempo}} \ddot{\theta} = m l^2 \ddot{\theta}\, \hat{\omega}$$

(quindi non derivate)

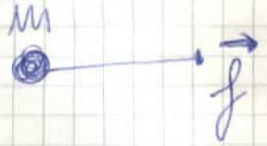
$$\boxed{\frac{d\vec{P}_o}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o}$$

$$m l^2 \ddot{\theta}\,\hat{\omega} = -mgl \sin\theta\, \hat{\omega}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

analoga a quella ricavata precedentemente.

LAVORO e ENERGIA CINETICA

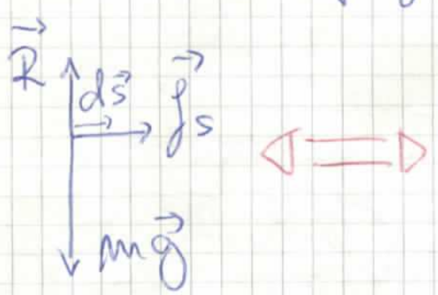


spostamento elementare

in questo caso lo spostamento non è causato da $\vec{f}$

in questo caso lo spostamento è causato dalla $\vec{f}$

Problema del libro che si sposta orizzontalmente in mano al professore:

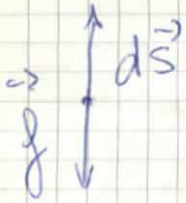


$\vec{R}$: reazione del braccio
$\vec{f}_s$: forza di spostamento
$m\vec{g}$: forza gravitazionale
$d\vec{s}$: spostamenti elementari

prodotto scalare

$$dL = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$ ← LAVORO ELEMENTARE

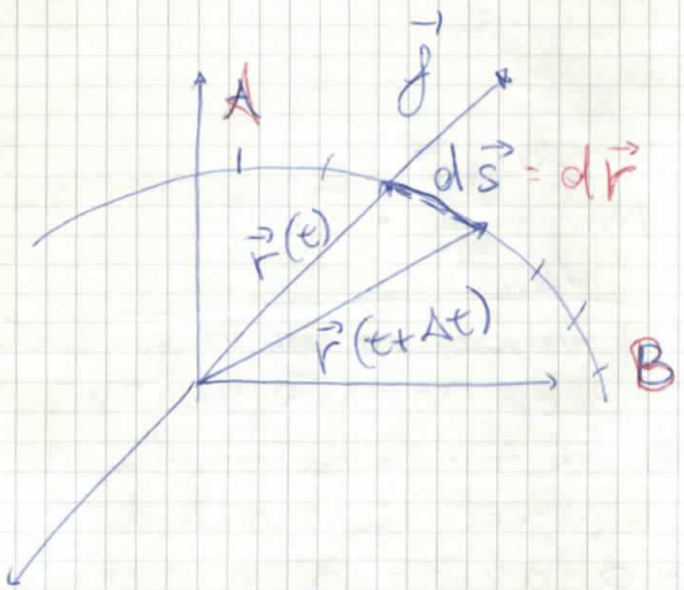
per $\vec{f}_s$ dL è diverso da 0; è quella la forza che cambia lo stato di moto (in direzione dello spostamento)



; in questo caso ottengo un lavoro negativo; il p.to materiale si muove contro la forza il lavoro può essere visto o per le forze una per una oppure per la totalità di esse agenti nel pto.

$$dL \begin{cases} >0 & d\vec{s} \text{ e } \vec{f} \text{ paralleli e concordi} \\ =0 & d\vec{s} \text{ e } \vec{f} \text{ perpendicolari} \\ <0 & d\vec{s} \text{ e } \vec{f} \text{ paralleli e discordi} \end{cases}$$

dL : $[N \cdot m] \equiv [J]$ Joule



Se Δt tende a 0 l'arco si confonde con la corda cioè $d\vec{s} = d\vec{r}$

Quanto vale la somma di questi lavori elementari compiuti da $\vec{f}$ nell'intervallo A e B?

$$\boxed{L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}}$$

scalare

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$L_{AB} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ è pari alla velocità per Δt

$$d\vec{s} = d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$L_{AB} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt$$

Attribuendo un significato non astratto matematico ma quello di piccoli intervalli di velocità su piccoli intervalli di tempo tendenti a 0 (allora si può semplificare $\frac{dt}{dt}$).

$$L_{AB} = m\int_A^B d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{dv^2}{dt}$$

perché $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2\cos 0 = v^2$

$$L_{AB} = m\int_A^B d\vec{v}\cdot\vec{v} = m\int_A^B \frac{1}{2}\left[\frac{dv^2}{dt}\right]dt$$

$$L_{AB} = \frac{m}{2}\left[v^2\right]_A^B \Rightarrow \boxed{L_{AB} = \frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{1}{2}m v_A^2}$$

Non interessa come si ottiene il lavoro, ma conta il valore integrale globale.
La forza agente nell'intervallo fa cambiare la velocità e la relazione trovata stabilisce quanto lavoro la forza ha compiuto:

$$L_{AB} = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2$$

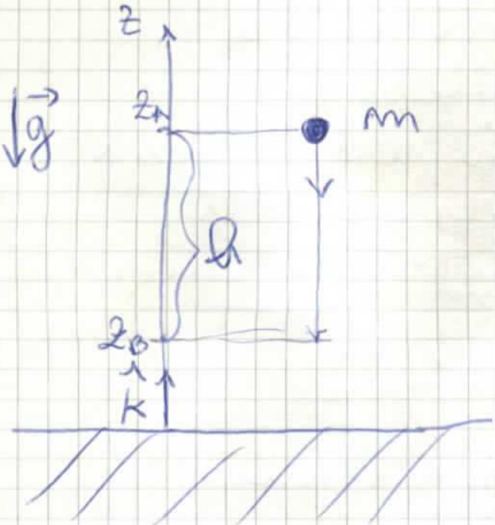
legami globali, non istantanei i legami globali che si ottengono senza analizzare il comportamento istantaneo.

Una forza perpendicolare allo spostamento non fa variare la velocità e quindi non compie lavoro.

ENERGIA CINETICA (K): $\frac{1}{2} m v^2$

$$\boxed{L_{AB} = K_B - K_A}$$

Nello spostamento orizzontale del libro la forza peso non compie lavoro (perché la forza è perpendicolare allo spostamento); la causa della variazione di velocità è la forza che io applico e quindi è lei che mi causa la variazione di energia cinetica facendo del lavoro.



Con che velocità arriva a zB?

$v_z(t)$

$z(t)$

$\vec{f} = -mg\hat{k}$

$d\vec{s} = dz \cdot \hat{k}$

$dL = \vec{f} \cdot d\vec{s} = -mg\,dz\underbrace{(\hat{k}\cdot\hat{k})}_{1} = -mg\,dz$

infatti se il punto va verso il basso $dz<0$ e quindi il lavoro è positivo (infatti forza e spostamento hanno lo stesso verso)

$$L_{AB} = -mg\int_{z_A}^{z_B} dz = mg\,z_A - mg\,z_B$$

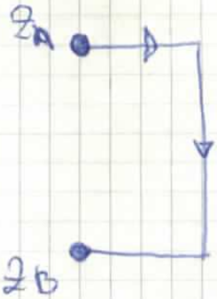
$L_{AB} = K_B - K_A$

$\boxed{v_A = 0}$

$mgh = \frac{1}{2} m v_B^2$

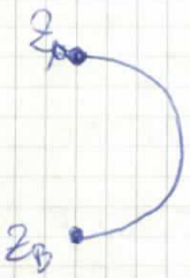
$v_B = \sqrt{2gh}$

Nel nostro caso il lavoro non dipende dal percorso (dimostrato nella pagina seguente)

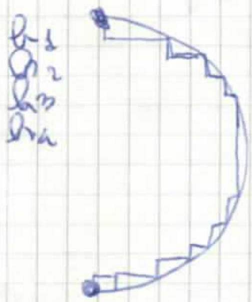


Cambiando il percorso il lavoro compiuto dalla forza peso è lo stesso (nei tratti orizzontali il lavoro della forza peso è 0 essendo la forza peso perpendicolare allo spostamento)

In generale è pure vero se il percorso è:



mezzo arco di circonferenza



Il lavoro è la somma dei lavori sui vari tratti:

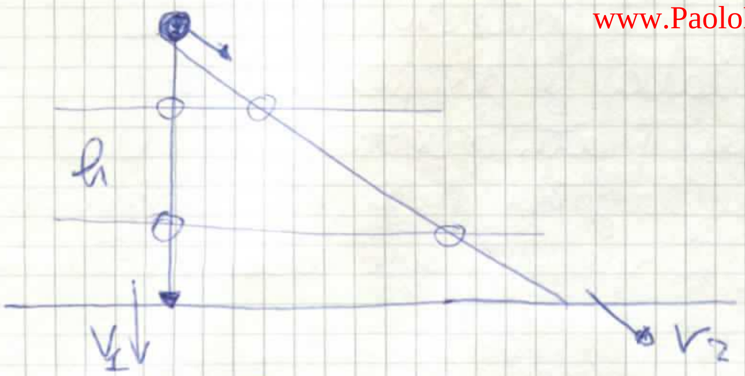
$$L = \sum h_i mg = mgh$$

Considerando infinitesimi quei tratti, si elimina il problema collegato al fatto che la spezzata non è la curva.

$$h_i \to dz$$

$$L = -mg\int_{z_A}^{z_B} dz$$

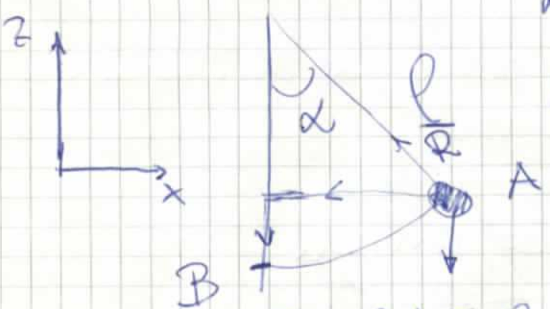
Considerando un oggetto lanciato verso l'alto che torna nella sua posizione allora il lavoro è nullo essendo $z_a = z_b$



La velocità con cui arriva a terra è la stessa cambiando percorso (o perpendicolarmente o sul piano inclinato)

$V_1^2 = V_2^2$ ma le direzioni sono diverse

da fare:



$\alpha = \frac{\pi}{3}$ ← con 60° non si possono usare le approssimazioni con $\sin\alpha = \alpha$

$l = 1\,m$

$\downarrow \vec{g}$

Qual'è la velocità con cui passa il pto quando attraversa la verticale?

$L_{AB} = K_B - K_A$

Supponendo A fermo: $K_A = 0$

$L_{AB} = K_B$

Integrale curvilineo

$$\frac{1}{2} m V_B^2 = \int_A^B (m\vec{g} + \vec{R}) \cdot d\vec{s}$$

$\vec{R}$ e $d\vec{s}$ sono sempre perpendicolari tra di loro quindi $\vec{R}$ non compie lavoro

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = \int_A^B \cancel{m} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

"La massa non conta perché si semplifica"

$$\vec{g} = -g\hat{k}$$

$$d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dz\,\hat{k}$$

il fatto che x sta diminuendo si capisce dagli estremi di integrazione.

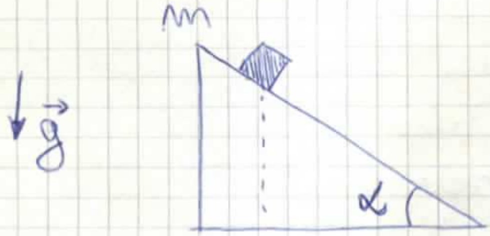
$$\frac{1}{2} v_B^2 = \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{s} = -g\int_A^B \left(dx\, \cancel{\hat{k} \cdot \hat{i}} + dz\, \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}_{1} \right) =$$

$$= -g \int_A^B dz = g\left[z_A - z_B\right]$$

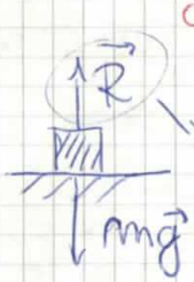
$$L_{AB} = mg\,z_A - mg\,z_B$$

è analoga a se non avessimo semplificato la massa

"Proprietà dei campi (forze) conservativi: il lavoro compiuto dalla forza non dipende dal percorso (questo per le forze)"

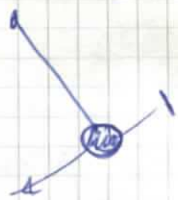


Reazioni vincolari: si hanno quando il moto di un pto materiale è impedito: sono le forze reagenti causate dagli impedimenti.



forza di reazione vincolare del piano

Anche nel nostro caso abbiamo un vincolo.
Gradi di libertà legati ai vincoli del sistema: ad esempio se il filo è rigido:



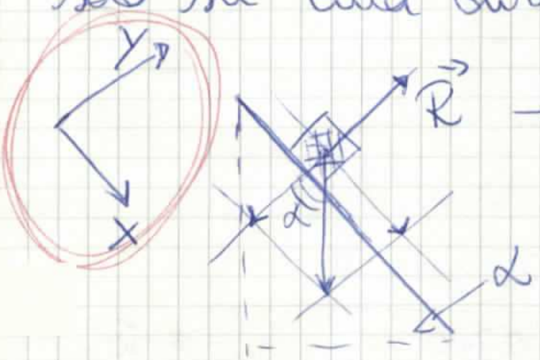
1 grado di libertà

la reazione del vincolo è sempre diretta in direzione opposta al movimento impedito

$h = l \sin\alpha$

$l = \dfrac{h}{\sin\alpha}$

La superficie può esercitare una reazione vincolare solo su una direzione perpendicolare alla superficie.



reazione vincolare: perpendicolare al piano ed uguale ed opposta alla componente della forza peso perpendicolare al piano

$\vec{f} = m\vec{g} + \vec{R}$

$\vec{f} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} f_x = m a_x \\ f_y = m a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{mg\sin\alpha}^{f_x \text{ ricavata da}} = m a_x \\ -mg\cos\alpha + R = m \underbrace{a_y}_{0} \end{cases}$$

perché non c'è accelerazione lungo y.

$R = mg\cos\alpha$

$g\sin\alpha = a_x$ ← moto uniformemente accelerato

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 = \left(\frac{1}{2} g \sin\alpha\right) t^2$

$v_x(t) = a_x t = g \sin\alpha\, t$

$$t^* = \sqrt{\frac{2\ell}{g \sin\alpha}}$$ quando $x(t) = \ell$

istante di arrivo

$$\begin{cases} v(t^*) = g \sin\alpha \cdot t^* = g \sin\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{2\ell}{g \sin\alpha}} = \sqrt{2 g \ell \sin\alpha} \\ \ell \sin\alpha = h \end{cases}$$

$$v(t^*) = \sqrt{2gh}$$

cioè non dipende dall'inclinazione, ma solo dalla quota di partenza del pto.

L'istante di arrivo non è lo stesso cadendo in verticale arriva prima.

* * (Stesso esercizio risolto alternativamente)

$$\begin{cases} L_{AB} = mg z_A - mg z_B \\ L_{AB} = K_B - K_A \end{cases}$$; qualunque sia il percorso

Il lavoro preso in esame è solo quello della forza peso

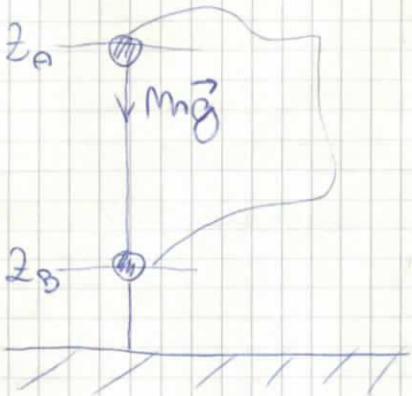
$K_A = 0$ $\quad z_A - z_B = h$

$$\begin{cases} L_{AB} = mgh \\ L_{AB} = \frac{1}{2} m v^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mgh$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

$L_{AB} = mg z_A - mg z_B$



Cambiando traiettoria il lavoro della forza peso non cambia. (forze conservative)

Nella differenza compaiono delle grandezze che dipendono esclusivamente dalla posizione:

altezza

ENERGIA POTENZIALE : $mg(z)$ $(V_{(z)})$

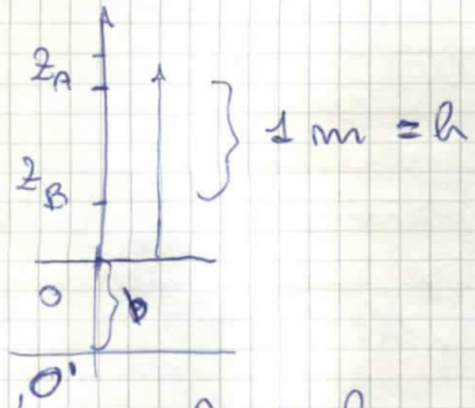
Energia attribuita ad un pto materiale in un campo di forze conservative.
A causa della posizione la forza peso può compiere lavoro se si sposta dalla posizione; lavoro non compiuto, ma che è possibile far compiere dalla forza peso.

Occorre una posizione di riferimento rispetto alla quale calcolare l'altezza.

$V(z) = mg z$ funzione di z

Il pto di riferimento non ci interessa ai fini del lavoro perché è calcolato come differenza tra le funzioni

$L_{AB} = V(z_A) - V(z_B)$



Ad esempio cambiando sistema di riferimento non cambia il lavoro che si compie da z_A a z_B (calcolato in termini di differenza di energie potenziale)

$L_{AB} = mgh$

$$\begin{cases} z'_A = z_A + b \\ z'_B = z_B + b \end{cases}$$

non dipende dal sistema di riferimento

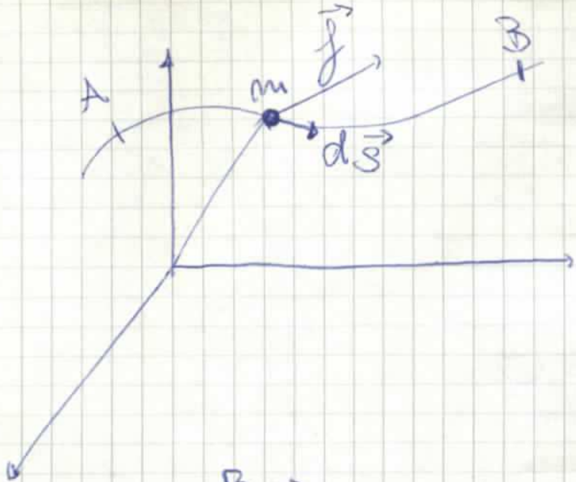
$L'_{AB} = mg(z'_A - z'_B) = mg(z_a + \cancel{b} - z_B - \cancel{b}) = mgh$

Il lavoro compiuto non dipende dal sistema di riferimento.

L'energia potenziale è definibile a meno di una costante:

$\boxed{V(z) = mgz + mgz_0}$ costante: (mgb) nel nostro caso.

dovuta al cambiamento di sistema di riferimento



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{cases} \vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} \\ d\vec{s} = dx\, \hat{i} + dy\, \hat{j} + dz\, \hat{k} \end{cases}$$

$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz$$

prodotto scalare

$$L_{AB} = \int_A^B \left[f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz \right]$$

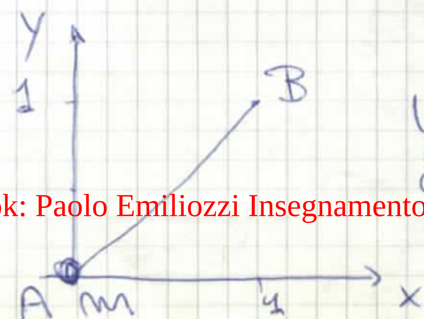
$$\left.\begin{matrix} f_x [x, y, z] \\ f_y [x, y, z] \\ f_z [x, y, z] \end{matrix}\right\} : \text{funzioni della posizione } (x, y, z)$$

Esempio

forza che giace su un piano:

$$\begin{cases} f_x = -a y \\ f_y = a x \end{cases}$$

Qual'è il lavoro compiuto dalla forza se portata da A a B.

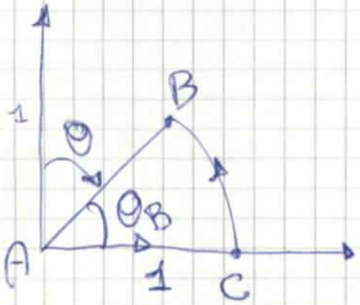


$y = x$

$dy = dx$

$$L_{AB} = \int_A^B f_x\, dx + \int_A^B f_y\, dy$$

$$L_{AB} = \int_0^1 -a x\, dx + \int_0^1 a x\, dx = 0 \qquad \boxed{x = y} \quad \boxed{dx = dy}$$



Cambiamo percorso

da A a C $\quad y = 0 \quad \Rightarrow f_x = 0$ $\qquad f_x = -a y$

lavoro nullo da A a C

sull'arco di circonferenza

$y^2 + x^2 = R^2$

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$d_y = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$L_{AB} = \int_A^B f_x\, dx + \int_A^B f_y\, d_y$$

$$-a \int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx + \int \frac{a x^2\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = L_{AB}$$

$$-a \int \frac{R^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = -a R^2 \int \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \\ dx = R\cos\theta \cdot d\theta \end{cases}$$

$$L_{AB} = -a R^2 \int \frac{\cancel{R\cos\theta}\, d\theta}{\cancel{R\cos\theta}}$$

Il lavoro non è nullo: cambiando percorso è cambiato il lavoro: forze non conservative.

Il lavoro dipende dal percorso in questo campo di forze: forza non conservativa

Se vogliamo che θ sia l'angolo $C\hat{A}B$ allora dovevamo sostituire:

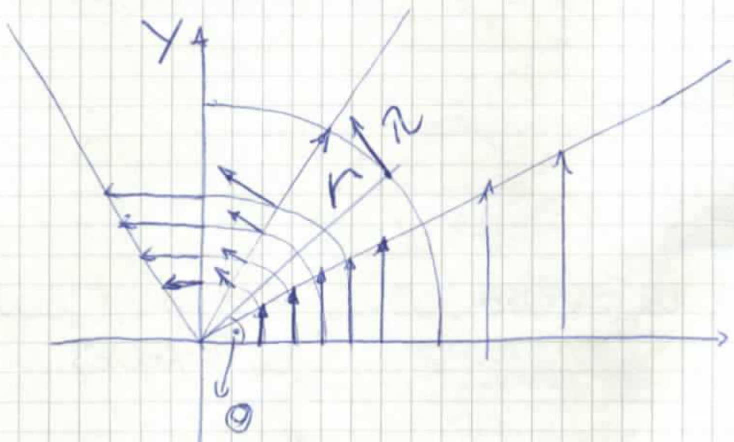
$x = R\cos\theta$

$$\begin{cases} f_x = -a y \\ f_y = a x \end{cases}$$

come è rappresentabile la forze?

coefficiente angolare

$m = a$



↑: i vettori sono le forze

← campi di forze ruotanti.

$$|f| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = a\sqrt{x^2+y^2} = a r$$

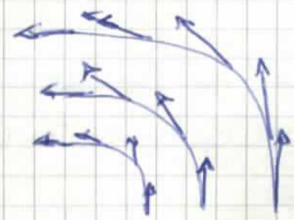
$$\hat{f} = \frac{\vec{f}}{|f|} = \frac{-a y\,\hat{\imath} + a x\,\vec{\jmath}}{a r} = -\left(\frac{y}{r}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{x}{r}\right)\hat{\jmath}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Quindi f è un campo vettoriale

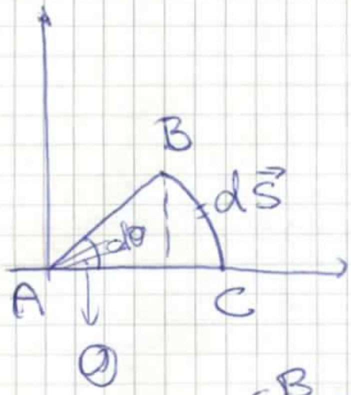
$$\hat{f} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} = \hat{\varphi}$$

La direzione e verso del vettore forza in un punto è quella della tangente alla circonferenza avente per raggio la distanza dall'origine al punto e centro nell'origine e modulo proporzionale alla distanza $(a\,r)$



Campo vettoriale in cui il vettore forza ruota.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA TENENDO PRESENTE CHE LA FORZA È IN DIREZIONE DELLA TANGENTE



$d\vec{s}$ è diretto lungo $\hat{\tau}$

$$L_{AB} = L_{CB} = \int_C^B \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

$$\begin{cases} \vec{f} = a\,r\,\hat{\tau} \\ d\vec{s} = r\,d\theta\,\hat{\tau} \end{cases}$$

angolo infinitesimo (vale solo se l'angolo è infinitesimo)

$$L_{AB} = L_{CB} = \int_C^B a\,r^2 \overbrace{(\hat{\tau}\cdot\hat{\tau})}^{1}\,d\theta = a\,r^2\int_C^B d\theta =$$

$$\boxed{\theta_C = 0}$$

$$= a\,r^2\left[\theta\right]_C^B = a\,r^2\,\theta_B$$

Per una forza non conservativa non possiamo introdurre l'energia potenziale

$L_{AB} = K_B - K_A$

Se le forze sono conservative

$L_{AB} = U_A - U_B$

$U = mgz$ se l'oggetto cade z diminuisce e l'energia potenziale finale è minore di quella iniziale: ecco perchè è $U_A - U_B$

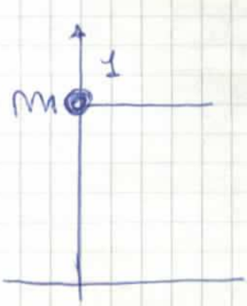
$U_A - U_B = K_B - K_A$

$U_A + K_A = U_B + K_B$

La somma delle energie potenziale e cinetica non cambia.
Se le forze sono conservative è una costante chiamata:

E : ENERGIA MECCANICA

$$\boxed{U + K = E}$$



$m = 1\ kg$ massa

$z = 1\ m$

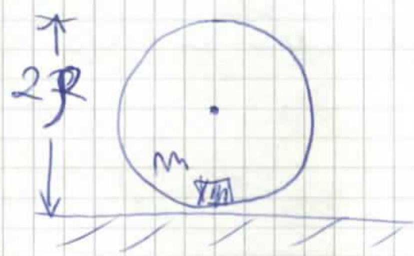
$v_0 = 0$

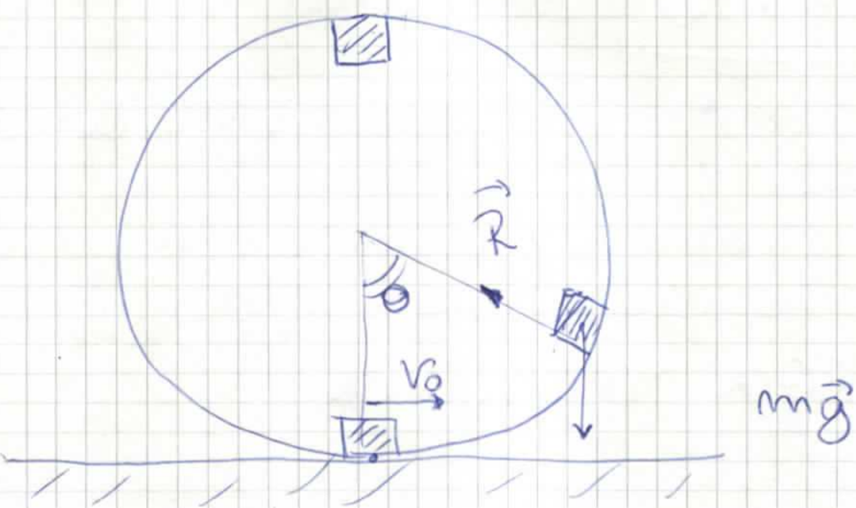
$E = \cancel{K} + U = mgz = 9{,}8 \left[Kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m\right] = 9{,}8\ [N \cdot m] = 9{,}8\ [J]$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$E_g = K + \cancel{U} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{\cancel{2}} m\, \cancel{2} g h = m g z = 9{,}8\ [J]$$

non è cambiata l'energia meccanica





Velocità con la quale deve partire per arrivare con velocità 0 sulla verticale

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

questa forza tenderebbe a far curvare nell'altro senso quindi la reazione deve essere maggiore per ottenere una curvatura consona alla guida

$$mg\cos\theta - R(\theta) = m a_c = m(-\omega^2\rho) = m\left(-\frac{v^2}{\rho}\right)$$

$$\begin{cases} mg\cos\theta - R(\theta) = -\dfrac{m}{\rho}v^2 \\ -mg\sin\theta = m\dot{\omega}\rho \end{cases}$$

Sappiamo che quando $\theta = \pi$ $v = 0$

Risolviamo con il principio della conservazione dell'energia:

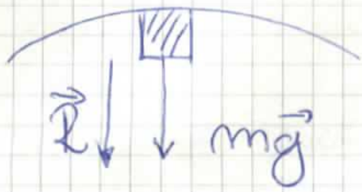
$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 + \cancel{U}$$

$$E_f = \cancel{K} + mg2\rho$$

$$\frac{v_0^2}{2} = 2 \cancel{m} g\rho \Rightarrow v_0 = 2\sqrt{g\rho}$$

Per fare il giro della

vite



Il pto materiale per fare il giro

velocità minima

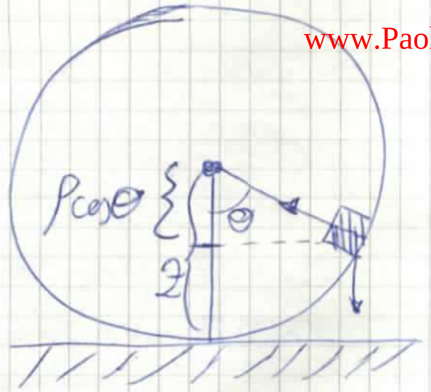
$$\begin{cases} R=0 & mg\cos\theta - R = -\frac{m}{\rho}v^2 & \theta=\pi \end{cases}$$

$$v_f^2 = \rho g$$

$$\begin{cases} E_i = \frac{1}{2}m v_0^2 \\ E_f = \frac{1}{2} m v_f^2 + mg2\rho = \frac{1}{2}m\rho g + mg2\rho \end{cases}$$

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{\rho g}{2} + 2g\rho \Rightarrow v_0^2 = 5g\rho$$

$$v_0 = \sqrt{5g\rho}$$



$$z = \rho - \rho\cos\theta = \rho(1-\cos\theta)$$

$$\begin{cases} E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 \\ E(\theta) = \frac{1}{2} m v^2(\theta) + mg\rho(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$v_0^2 = v^2(\theta) + 2g\rho(1-\cos\theta)$$

$$\begin{cases} v^2(\theta) = v_0^2 - 2g\rho(1-\cos\theta) \\ R(\theta) = mg\cos\theta + m\frac{v^2(\theta)}{\rho} \end{cases}$$

$$R(\theta) = mg\cos\theta + \frac{m}{\rho}v_0^2 - \frac{m}{\cancel{\rho}}2g\cancel{\rho}(1-\cos\theta)$$

$$R(\theta) = 3mg\cos\theta - 2mg + m\frac{v_0^2}{\rho}$$

$$R(\theta) = mg(3\cos\theta - 2) + \frac{m v_0^2}{\rho}$$

La reazione vincolare dipende dalla velocità iniziale

$$R(0) = mg + \frac{m v_0^2}{\rho}$$

se il pto è fermo ($v_0 = 0$) allora la reazione vincolare $= mg$.

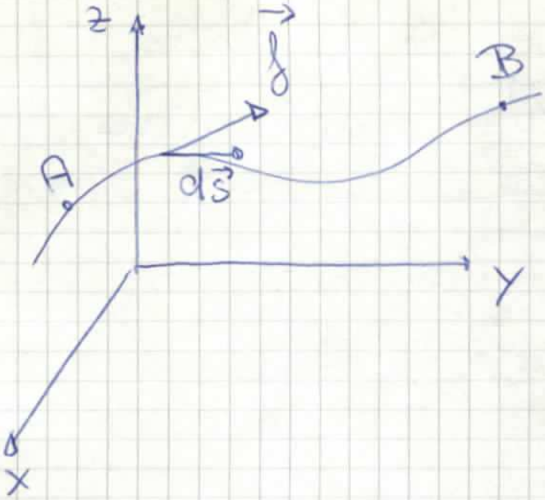
termine che ci dà l'accelerazione centripeta

$R\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$$R(\pi) = -5mg + \frac{m v_0^2}{\rho}$$ a_c

la velocità minima si ottiene per $R(\pi) = 0$
$v_0 = \sqrt{5g\rho}$

$$\rho = \frac{v^2}{a_c}$$

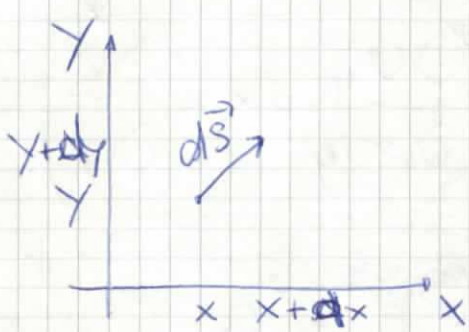


$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$L_{AB} = K_B - K_A \qquad K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$L_{AB} = U_A - U_B$$!!(solo per forze conservative)!!

$$K_A + U_A = K_B + U_B \equiv E$$!!(solo per forze conservative)!!



$$\vec{f}(x,y) = \left[f_x(x,y)\hat{i} + f_y(x,y)\hat{j} \right]$$

Ciascuna componente dipende dal pto del piano.

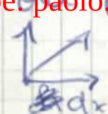
!! Quanto vale il lavoro compiuto da $\vec{f}$ per spostare il pto da (x,y) a $(x+dx, y+dy)$!!

$$dL = \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{f_x\, dx}_{\text{lavoro che}} + f_y\, dy$$

lavoro che

compie [illegible] da (x,y)

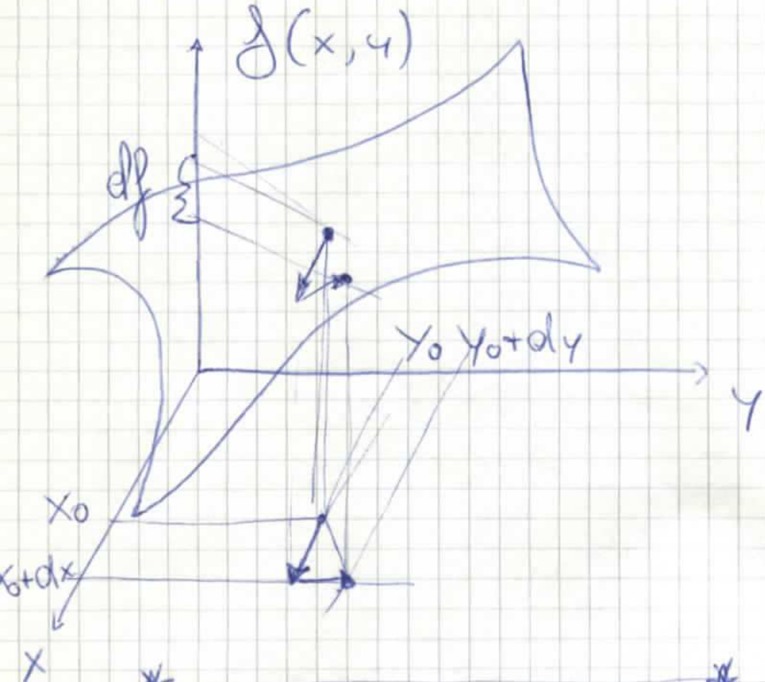
orizzontalmente



$$\begin{cases} dL = \vec{f}\cdot d\vec{s} = f_x dx + f_y dy \\ dL = U(x,y) - U(x+dx, y+dy) \end{cases}$$

se la forza è conservativa

ACCENNO SU TAYLOR A PIÙ VARIABILI



Variamo prima x di un dx e poi y di un dy.

Analizziamo parzialmente le due differenze

$$U(x+dx, y+dy) = U(x,y) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy$$

Variazione di U se mi sposto di dx tenendo y costante.

$$dU = U(x+dx, y+dy) - U(x,y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy$$

$$\begin{cases} dL = \vec{f} \cdot d\vec{s} = f_x\, dx + f_y\, dy \\ dL = U(x,y) - U(x+dx, y+dy) = -dU \end{cases}$$

$$f_x\, dx + f_y\, dy = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy$$

$$\begin{cases} f_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y \\ f_y = -\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x \end{cases}$$

Nel caso gravitazionale:

$$U(z) = mgz + c$$

$$f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -mg$$

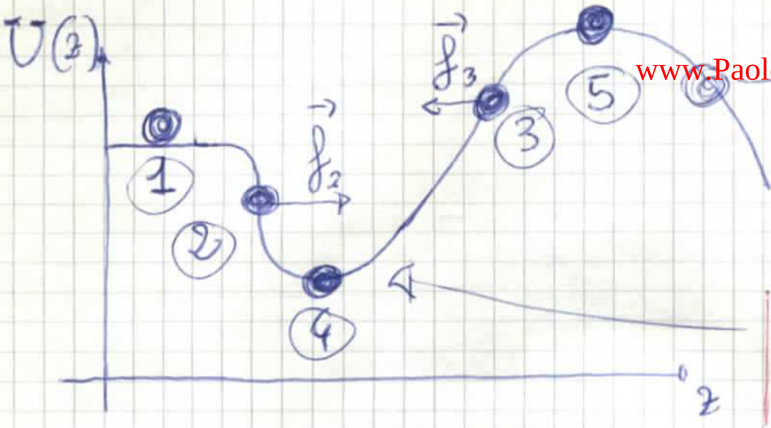
$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = -\frac{\partial (x,y,z)}{\partial x} \\ f_y(x,y,z) = -\frac{\partial (x,y,z)}{\partial y} \\ f_z(x,y,z) = -\frac{\partial (x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{f} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{f} = -\,\mathrm{grad}\, U}$$

Una forza lungo una direzione non dipende solamente dalla variabile che tale direzione caratterizza



se è un tratto parabolico allora avremo una forza proporzionale allo spostamento

① $f_1 = 0$: derivata di una costante

PUNTO DI EQUILIBRIO: punto in cui si annullano tutte le forze

EQUILIBRIO INDIFFERENTE: se calcolo la forza in un pto vicino al precedente la forza è ancora 0.

② derivata negativa : forza positiva

③ derivata positiva : forza negativa

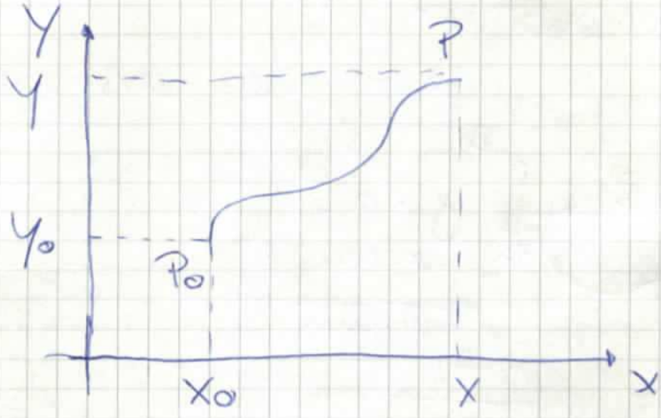
④ $f_4 = 0$ minimo relativo

PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE : non appena si sposta c'è una forza che tende a riportarlo dove sta

⑤ $f_5 = 0$ max relativo

PUNTO DI EQUILIBRIO INSTABILE : non appena si sposta le forze tendono ad allontanarlo dal pto di equilibrio (instabile)

$$dU = -f_x\,dx - f_y\,dy$$



$$\int_{P_0}^{P} dU = -\int_{P_0}^{P} \left[f_x\,dx + f_y\,dy\right]$$

$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = -\int_{P_0}^{P} \left[f_x\,dx + f_y\,dy\right]$$

$$U(x,y) = -\int_{P_0}^{P} \left[f_x\,dx + f_y\,dy\right] + U(x_0,y_0)$$

Conoscendo la forza f posso ricavare la funzione energia dando un pto di riferimento P_0 e calcolare $-\int_{P_0}^{P}(f_x\,dx + f_y\,dy) + U(x_0,y_0)$

$U(x_0,y_0)$ = costante

Posso scegliere di porla $=0$;

$U(x_0,y_0) = 0$ Potenziale nullo

$$f_z = -mg$$

$$U(z) = -\int^{z} -mg\,dz = mgz$$

Abbiamo posto nell'origine degli assi $U(0)=0$

Supponiamo che sul p.to siano applicate forze conservative e non conservative

$$L_{AB} = K_B - K_A$$

forze conservative

forze non conservative

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_A^B \vec{f}_{con}\cdot d\vec{s}}_{U_A - U_B} + \underbrace{\int_A^B \vec{f}_{non.con}\cdot d\vec{s}}_{L_{AB}^{n.con}}$$

$$K_B - K_A = U_A - U_B + L_{AB}^{n.con.}$$

$$\boxed{L_{AB}^{n.con} = E_B - E_A}$$

L'energia meccanica non è costante e la differenza fra l'energia meccanica finale e quella iniziale è pari al lavoro compiuto dalle forze non conservative.

$$\begin{cases} f_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\[2mm] f_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y \partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial f_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

se è verificata le forze sono conservative