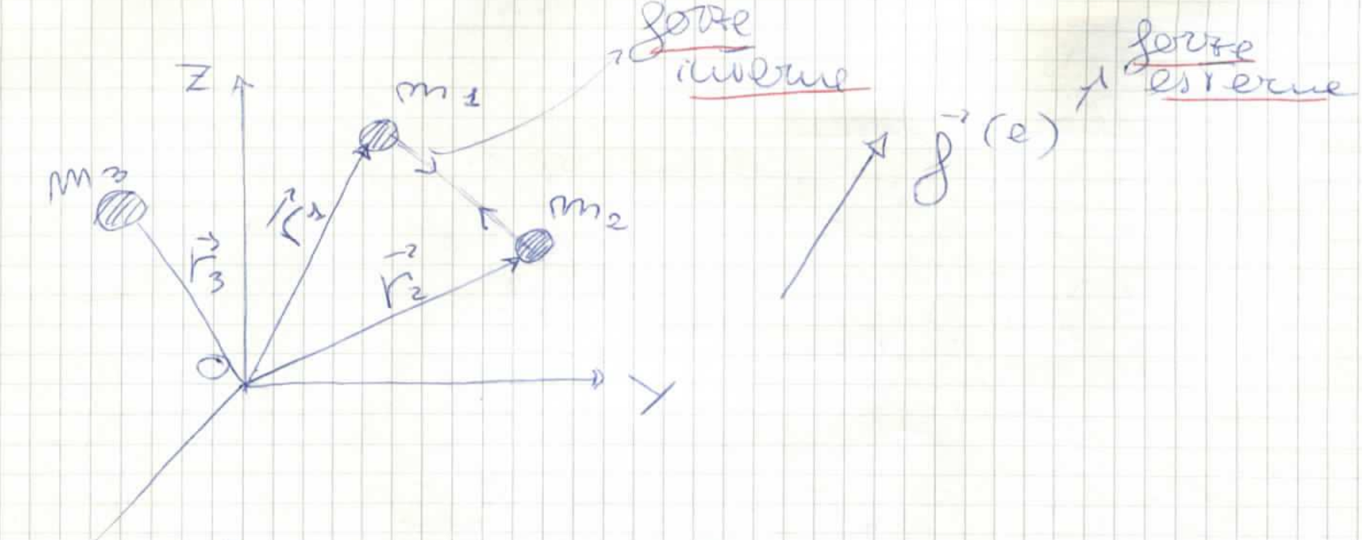
SISTEMI DI PUNTI MATERIALI



X

la forza dipende dalla posizione

$$m_1 : \vec{f}_1^{(e)}(\vec{r}_1) \qquad m_2 : \vec{f}_2^{(e)}(\vec{r}_2)$$

Potrebbero esistere delle forze interne di interazione tra le masse stesse

$$\begin{cases} m_1 : \vec{f}_1^{(e)}(\vec{r}_1) + \vec{f}_1^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ m_2 : \vec{f}_2^{(e)}(\vec{r}_2) + \vec{f}_2^{(i)}(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \end{cases}$$

forze interne che dipendono dalla reciproca posizione delle masse : $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$

Aggiungendo masse aumentano le relazioni di forza interna : la forza esterna non cambia. (es $\vec{f}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_3)$)

La somma di tutte le forze interne che agiscono sulla massa 1 a causa della presenza delle altre masse si chiama

$\vec{f}_1^{(i)}$: FORZA INTERNA SULLA MASSA 1.

ed analogamente per le altre

quindi:

$$m_1 : \vec{f}_1^{(e)}(\vec{r}_1) + \vec{f}_1(r_1, r_2, r_3) \text{ ecc.}$$

dipende da $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$

$$\begin{cases} \vec{f}_1^{(e)}(\vec{r}_1) + \vec{f}_1^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \\ \vec{f}_2^{(e)}(\vec{r}_2) + \vec{f}_2^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \\ \vdots \\ \vec{f}_3^{(e)}(\vec{r}_3) + \vec{f}_3^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = m_3 \dfrac{d^2\vec{r}_3}{dt^2} \end{cases}$$

*con N masse si devono ricavare 3N coordinate

|| Abbiamo N eq. vettoriali e 3 eq. scalari per ogni eq. vettoriale. ||

|| Si va a conoscere come si evolve il sistema di pti materiali. ||

$$\vec{q} = m\,\vec{r}$$

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$ ✓ { 2ª eq. della dinamica in funzione della derivata della quantità di moto }

$$\begin{cases} \vec{f}_1^{(e)} + \vec{f}_1^{(i)} = \dfrac{d\vec{q}_1}{dt} \\ \vec{f}_2^{(e)} + \vec{f}_2^{(i)} = \dfrac{d\vec{q}_2}{dt} \\ \vec{f}_3^{(e)} + \vec{f}_3^{(i)} = \dfrac{d\vec{q}_3}{dt} \end{cases}$$

N

Sommando le 3 equazioni: $\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}\right)$

$\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{(i)} = \vec{F}^{(i)}\right)$

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{q}_i = \vec{Q}\right)$

la somma delle derivate è uguale alla derivata della somma.

$$\vec{f}_1^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{f}_2^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

{Le forze tra le 2 masse 1 e 2 sono uguali ed opposte.}

{Nella somma delle forze interne ne abbiamo tutte coppie:}

$$\vec{F}^{(i)} = 0$$

(La quantità di moto totale di un sistema di p.ti materiali non varia a causa delle forze interne, dipende solo dalle forze esterne. (potrebbero cambiare le quantità di moto dei singoli p.ti ma non quella totale).

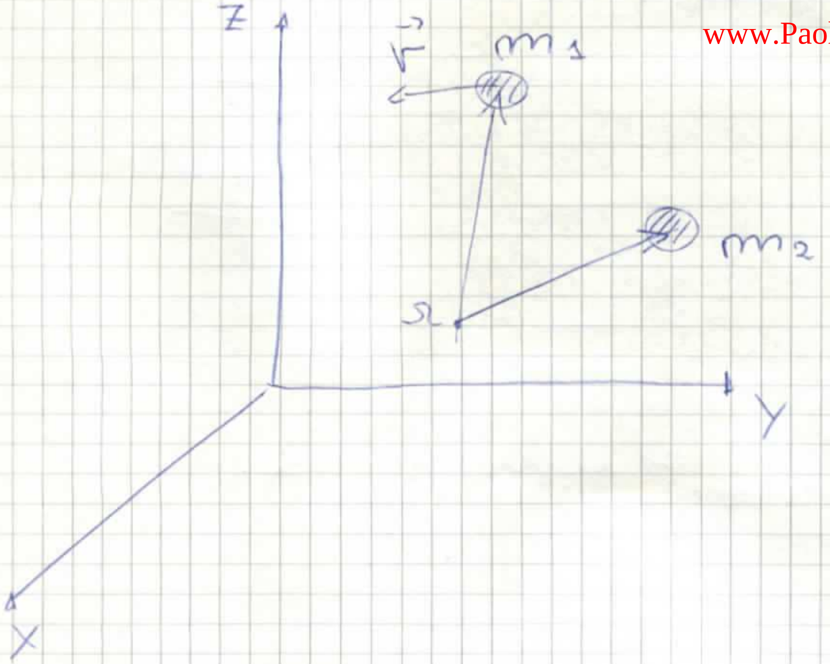
cioè $$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Se vi sono solo forze interne la quantità di moto è costante:

se $\vec{F}^{(e)} = 0 \Longrightarrow Q$ è costante.

Per esempio nel nostro sistema solare.

([illegible] talmente lontani da non interagire).



$$\begin{cases} \vec{p}_\Omega = \vec{r}_\Omega \times \vec{q} \\ \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_\Omega - \vec{v}_\Omega \times \vec{q} \end{cases}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r}_\Omega \times \vec{f}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{\mathcal{M}}^{(e)}_{\Omega 1} - \vec{v}_\Omega \times \vec{q}_1 + \vec{\mathcal{M}}^{(i)}_{\Omega 1} \\ \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{\mathcal{M}}^{(e)}_{\Omega 2} + \vec{\mathcal{M}}^{(i)}_{\Omega 2} - \vec{v}_\Omega \times \vec{q}_2 \end{cases}$$

Sommando:

$$\vec{P} = \Sigma\, \vec{p}_i \qquad M = \Sigma\, M^{(e)}_{\Omega i} \qquad \vec{Q} = \Sigma\, \vec{q}_i$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)} - \vec{v}_\Omega \times \vec{Q}$$

Si annulla anche il momento delle forze interne perchè la retta di azione delle forze a coppie è la stessa (è uguale la distanza dal polo ed opposti i momenti)

$$\begin{cases} \vec{M}^{(e)} - \vec{V}_{\Omega} \times \vec{Q} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \\ \vec{F}^{(e)} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} \end{cases}$$

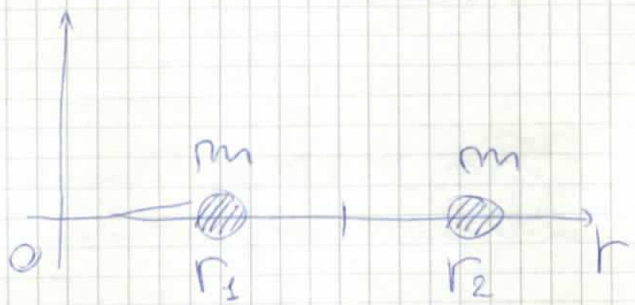
Scompare l'informazione singola e resta quella generale.

analoghe a quelle relazioni trovate per i singoli pti materiali

Se prendiamo come polo un pto fisso $\vec{V}_{\Omega} = 0$ e supponendo che $\vec{M}_{\Omega}^{(e)} = 0$ allora il momento angolare totale si mantiene costante (è il caso del nostro sistema solare).

Il momento delle forze gravitazionali rispetto al sole è 0 perché la forza è centrale.

CENTRO DI MASSA



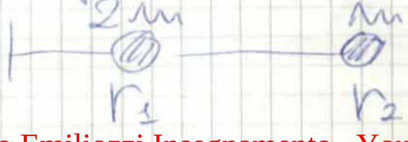
posizione centrale

$$r_c = \frac{r_1 + r_2}{2}$$ ← pto medio del segmento

$$r_c = \frac{m\, r_1 + m\, r_2}{2m}$$

→ massa totale

Se la prima massa fosse 2 m:



$$r_c = \frac{r_1 + r_1 + r_2}{3}$$ media tra i 3 raggi

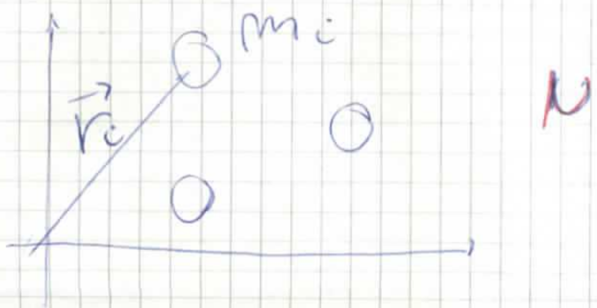
$$r_c = \frac{2m\,r_1 + m\,r_2}{3m}$$ massa totale

La MEDIA PESATA è

Si trova un massimo comune divisore e si procede analogamente.

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$ PTO MEDIO TRA 2 masse generiche

MEDIA PESATA



La posizione media sarà un vettore.

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

calcoliamo la velocità del pto geometrico ($\vec{v}_c$)

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{Q}}{M}$$

$$\vec{Q} = M \vec{v}_c$$

{La quantità di moto del sistema è calcolabile analizzando solo il pto "centro di massa"}

Scegliendo come polo il centro di massa

$\vec{v}_\Omega \times \vec{Q}$

$\vec{v}_c \times \vec{Q} \Rightarrow \vec{v}_c \times M \vec{v}_c = 0$

quindi:

$$\vec{M}_c^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

(cioè anche se il pto si muove vale la relazione, oltre a valere se il polo è fisso: $V_\Omega = 0$)

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt} \\[2ex] \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{M}_c^{(e)} \end{cases}$$

EQUAZIONI CARDINALI del sistema di pti materiali.

$$M \vec{a}_c = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$$

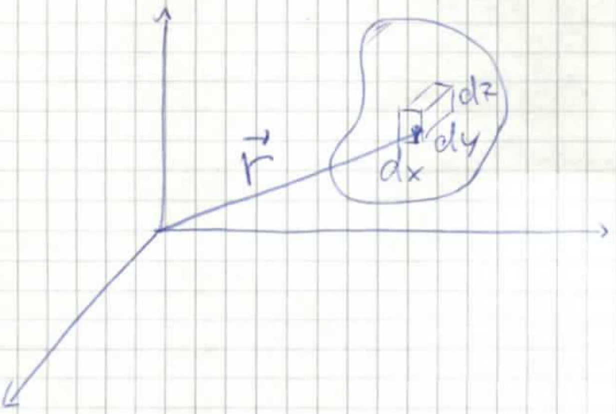
derivando: $\vec{v}_c = \dfrac{\vec{Q}}{M}$

Il centro di massa si muove come se tutta la massa fosse nel pto sotto l'azione delle forze esterne

Senza forze esterne il centro di massa viaggia di moto rettilineo uniforme.

Il moto del centro di massa dipende solo dalle forze esterne (non da quelle interne)

Esempio della bomba a mano.



Sistema continuo: un corpo e non pti materiali isolati:

* volume totale infinitesimo:

$$dV = dx\,dy\,dz$$

* massa totale:

$$\frac{dM}{dV} = \rho(\vec{r}) = \rho(x,y,z)$$

La densità può essere funzione della posizione se l'oggetto non è omogeneo

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$dM = \rho(\vec{r})\,dV$$

$$M = \int_V \rho(\vec{r})\,dV$$

se il corpo ha densità costante:

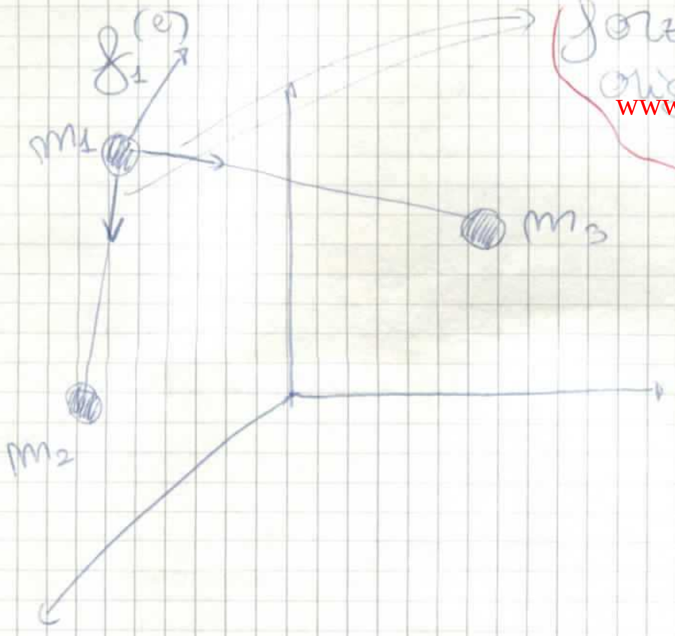
$$M = \rho \int_V d\tau = \rho V$$

Per calcolare il centro di massa considero il corpo composto da tante masse dM.

$$m_i = dM$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\int dM\, \vec{r} = \frac{1}{M}\int \underbrace{\rho(\vec{r})\, d\tau}_{dM} \cdot \vec{r} =$$

$$= \frac{1}{M}\int \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, d\tau$$



forze interne con origine nel sistema di pti materiali

Sistema discreto: composto da tanti pti materiali

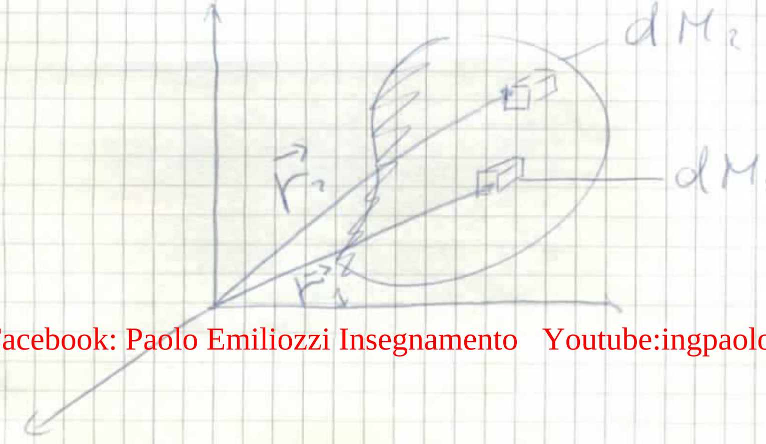
Sistema continuo:

In realtà nessun sistema è assolutamente discreto né assolutamente continuo

Sistema discreto: con pti materiali liberi fra loro; le forze interne possono variare la posizione reciproca dei pti

Sistema continuo: né le forze interne né quelle esterne possono deformare il corpo: CORPO CONTINUO RIGIDO

In entrambi i casi si considera il sistema formato da pti materiali (discreti o infiniti)



$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{d\tau} = \rho(\vec{r_1}) \\ \dfrac{dM_2}{d\tau} = \rho(\vec{r_2}) \end{cases}$$

ρ: DENSITÀ

$d\tau$: unità infinitesima di volume.

(Le forze interne possono agire all'interno di un corpo rigido sulle masse infinitesime (ad esempio): forze infinitesime (ad esempio forze gravitazionali)
Tutto quello detto per i sistemi di pti materiali vale anche per quelli continui.)

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \sum \vec{f}_i^{(e)} \\ \vec{Q} = \sum \vec{q}_i \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$$

che è uguale alla formula trovata per un solo pto materiale

causa di ogni variazione di quantità di moto del sistema.

$$\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_c$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M \vec{a}_c = \vec{F}^{(e)}$$

Nei corpi rigidi la posizione del centro di massa rimane inalterata rispetto al corpo stesso mentre per quanto riguarda il centro di massa di un sistema di pti materiali l'informazione non è collegata alle posizioni singole [illegible] del nostro sistema.

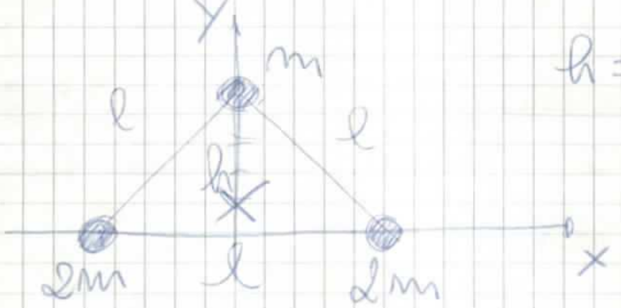
L'informazione ne centro di massa è più utilizzabile nel caso in cui sia riferito ad un corpo rigido; conoscere il moto del centro di massa equivale a conoscere il moto del corpo (a meno di una rotazione del corpo).

Quindi l'equazione: $\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)}$

ci dà il moto del centro di massa ma non la rotazione del corpo rigido (informazione che ci viene data dalla 2ª eq. cardinale)

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Posizione media pesata

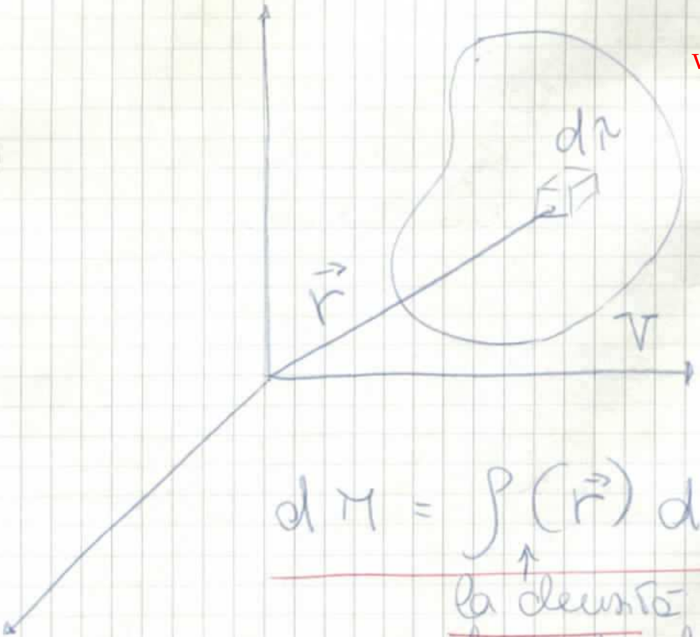


$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

Essendo il problema piano occorre conoscere $\vec{r}_c$ cioè x e y.

Proiettando:

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{M}\sum m_i x_i = \frac{1}{5m}\left[\frac{l}{2}m2 - \frac{l}{2}2m\right] = 0 \\ y_c = \frac{1}{M}\sum m_i y_i = \frac{1}{5m}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} l m\right] = \frac{h}{5} \end{cases}$$



$$dM = \rho(\vec{r})\, d\tau \Rightarrow M = \int \rho(\vec{r})\, d\tau$$

la densità dipende dal pto che si analizza.

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

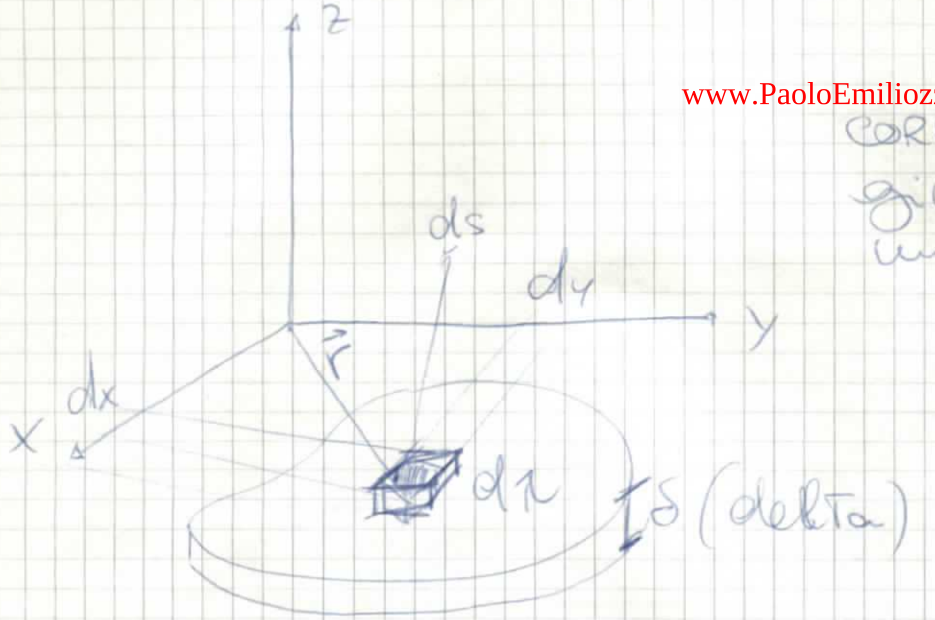
$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum dM\, \vec{r}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int dM\, \vec{r} \Rightarrow \vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, d\tau$$

{somma su elementi infinitesimi.}

{la somma la facciamo su tutto il volume del corpo.}

$$M = \int_V \rho(\vec{r})\, d\tau$$



CORPO CONTINUO giacente su un piano.

l'altezza δ è molto più piccola delle dimensioni superficiali: il corpo è approssimabile ad una superficie.

$$d\tau = dx\,dy\,\delta$$

$$dM = \rho(\vec{r})\,d\tau = \underbrace{\rho(\vec{r})\,\delta}\,\overbrace{dx\,dy}^{ds}$$

se δ è costante:

$\frac{kg}{m^3}\,m$ { densità di massa per unità di superficie

$$\rho(\vec{r})\,\delta = \alpha(\vec{r})$$

densità superficiale di massa $\left[\frac{kg}{m^2}\right]$ non densità di volume

$$dM = \alpha(\vec{r})\,ds$$

non più densità di volume per volume elementare ma densità di superficie per superficie elementare.

integrale di superficie (doppio anziché triplo come l'integrale di volume).

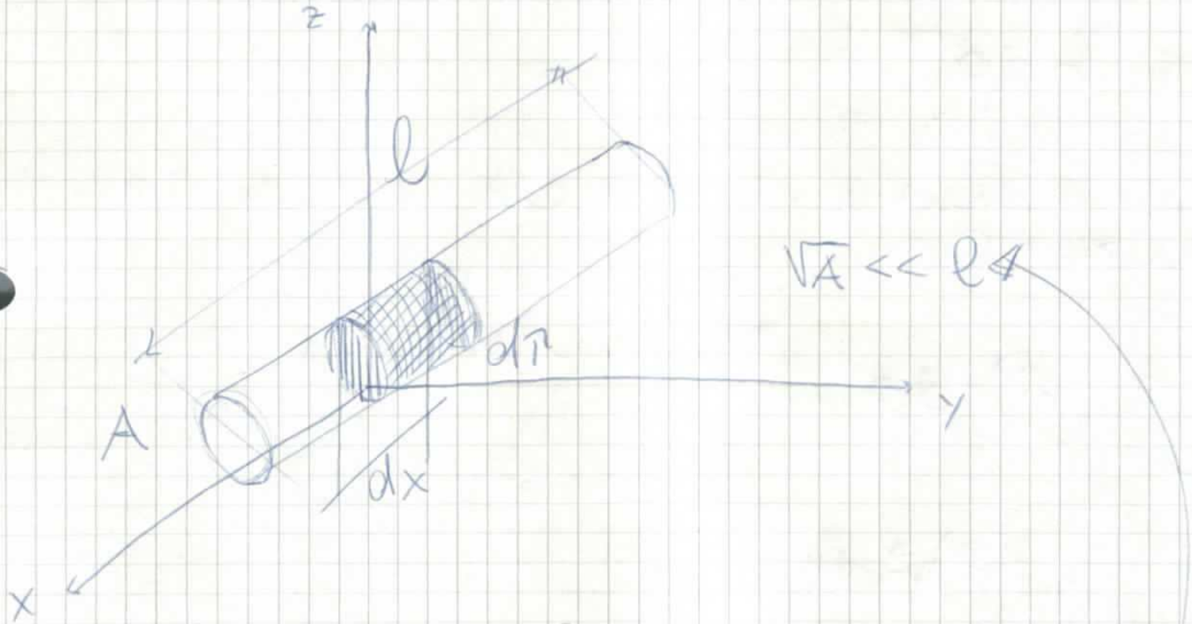
220

superficie

$$M = \int_S \alpha(\vec{r})\, dS$$ si deve integrare solo su 2 variabili.

Per la posizione del centro di massa:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_S \alpha(\vec{r})\, \vec{r}\, dS$$



filiforme: se la dimensione della sezione è molto più piccola della dimensione del corpo stesso (ℓ).

$$d\tau = A\,dx$$

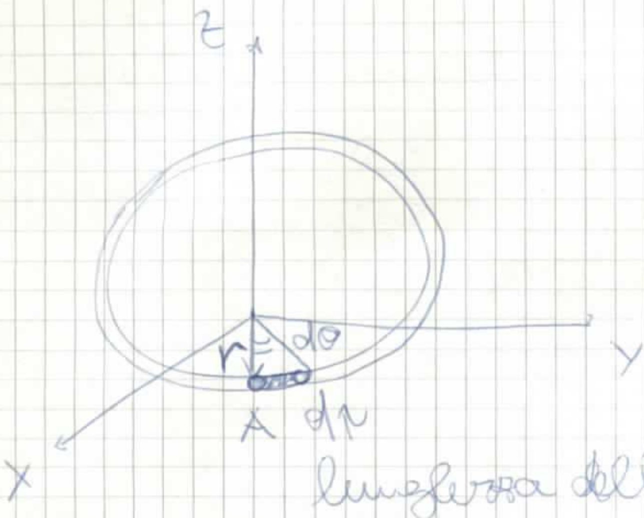
$$dM = \underbrace{\rho(\vec{r})A}_{\frac{kg}{m}\ \text{densità lineare}\ \lambda(x)} \overbrace{dx}^{\text{volume}}$$

$\vec{r}$ in realtà è solo la coordinata x perché la distribuzione si sviluppa tutta su x.

$$dM = \lambda(x)\,dx \qquad M = \int_L \lambda(x)\,dx$$ ← estesa a tutta la lunghezza.

$\vec{r}_c$

$$x_c = \frac{1}{M} \int_L \lambda(x)\, x\, dx$$



lunghezza dell'arco di curva.

$$dv = A \overset{\frown}{r\,d\theta}$$

Abbiamo una densità lineare che dipende solo dalla distanza r.

$$M = \int_L \lambda(\vec{r})\, dl$$

lunghezza del tratto elementare

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_L \lambda(\vec{r})\vec{r}\, dl$$

fili formi

Espressione più generale del 3° caso (filiforme)

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \rho(\vec{r})\, \vec{r}\, dv$$

Integrale di volume

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_S \sigma(\vec{r})\, \vec{r}\, ds$$

Integrale di superficie

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_L \lambda(\vec{r})\, \vec{r}\, dl$$

Integrale curvilineo

Consideriamo l'oggetto filiforme

* $\lambda(x) = \lambda_0$ non varia pto per pto ; il centro di massa : $\frac{L}{2}$

$M = \lambda_0 L$

$$x_c = \frac{1}{\cancel{\lambda_0} L} \int_0^L \cancel{\lambda_0}\, x\, dx = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{1}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{2}}}{2} = \frac{L}{2}$$

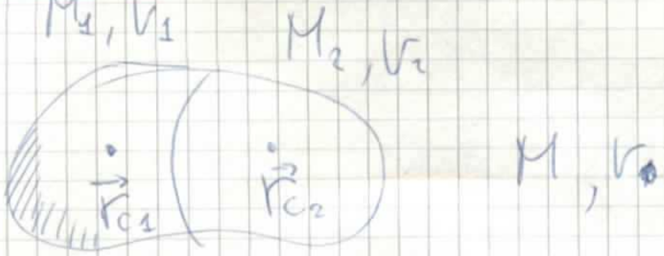
* $\lambda(x) = a x \qquad a\left[\frac{kg}{m^2}\right]$

$$M = \int_0^L \lambda(x)\, dx = \int_0^L a x\, dx = a\frac{L^2}{2}$$

$$x_c = \frac{1}{M}\int_0^L \lambda(x)\, x\, dx = \frac{1}{M}\int_0^L a x^2\, dx = \frac{a}{M}\frac{L^3}{3} =$$

$$= \frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}\cancel{L^2}}\frac{L^{\cancel{3}}}{3} = \frac{2}{3}L$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \rho(\vec{r}) \, \vec{r} \, d\tau$$ *



Si può suddividere il sistema in 2 parti e trovare i centri di massa parziali e poi calcolare (mettendo le masse nei rispettivi centri di massa) il centro di massa totale (dim)

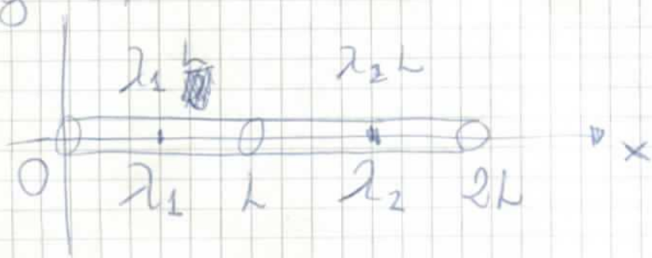
$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \left[\frac{M_1}{M_1} \int_{V_1} \rho \, \vec{r} \, d\tau + \frac{M_2}{M_2} \int_{V_2} \rho \, \vec{r} \, d\tau \right]$$

$\downarrow \vec{r}_{c_1}$ $\qquad$ $\downarrow \vec{r}_{c_2}$

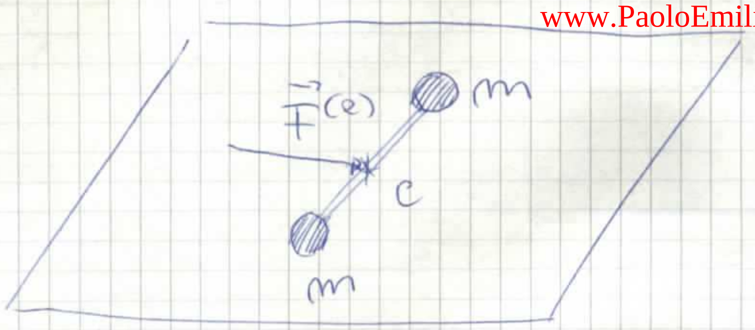
$$\vec{r}_c = \frac{M_1 \vec{r}_{c_1} + M_2 \vec{r}_{c_2}}{M}$$ *

Proprietà estendibile ad n pezzi.

da fare:



Omogenea a pezzi. centro di massa?



$\vec{Q} = m\,\vec{v}_c \qquad \frac{d\vec{Q}}{dt} = m\,\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)}$

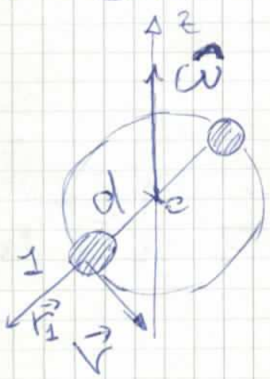
Forza applicata nel centro di massa

Il moto del bilancere sarà un moto puramente traslatorio.

Se la retta di azione della forza passa per il centro di massa:

il $\vec{M}_\Omega^{(e)} = 0$ quindi il momento angolare del sistema rimane costante:

$\vec{P}_c = cost \qquad \Omega = c$



$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \omega\, d\, \tau_1 \\ \vec{v}_2 = \omega\, d\, \tau_2 \end{cases}$$

$P = \vec{r} \times \vec{q}$

$$\begin{cases} \vec{P}_1 = d \cdot \hat{r}_1 \times m\omega d\, \tau_1 \\ \vec{P}_2 = d \quad \hat{r}_2 \times m\omega d\, \tau_2 \end{cases}$$

cioè associamo il momento angolare solo ai corpi in rotazione

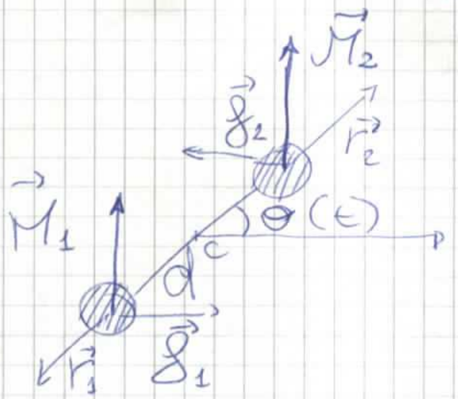
$$P = m\omega d^2 (\underbrace{\hat{r}_1 \times \tau_1}_{\omega} + \underbrace{\hat{r}_2 \times \tau_2}_{\omega}) = md^2\, 2.\, \vec{\omega}$$

ma noi sappiamo che $\vec{P}_c = \text{cost}$ se $\vec{M}^{(e)} = 0$

cioè per far ruotare occorre che il $\vec{M}^{(e)}$ sia diverso da 0.

$$\vec{P} = 2\, m\, d^2\, \vec{\omega} = I\, \vec{\omega}$$

MOMENTO D'INERZIA (I)



forze sempre applicate al pto materiale durante il moto (ruotano).

$$\begin{cases} \vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 = d\, f\, \hat{\omega} \\ \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 = d\, f\, \hat{\omega} \end{cases}$$

Le due forze agiscono in direzioni opposte, ma i momenti sono paralleli ad ω e paralleli fra loro.

$$\vec{M}^{(e)} = 2\, d\, f\, \hat{\omega}$$

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = M^{(e)}$$

$$I\, \dot{\omega} = M^{(e)} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{M^{(e)}}{I} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

costante nel tempo

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{\omega} = \dfrac{M^{(e)}}{I} \\[2ex] \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{f}{m} \end{cases}$$

$I \rightarrow$ momento d'inerzia: più grande è, minore è l'accelerazione angolare.

$m \rightarrow$ massa inerziale

Moto circolare uniformemente accelerato:

$$\dot{\omega} = \frac{M^{(e)}}{I} \Rightarrow d\omega = \frac{M}{I}\,dt \qquad t_0 = 0$$

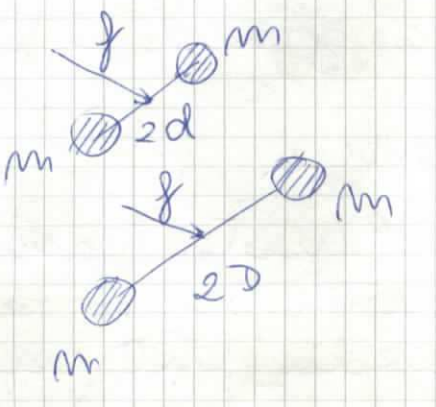
$$\omega(t) - \omega_0 = \frac{M^{(e)}}{I}\,t$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{M^{(e)}}{I}\,t$$

cioè la velocità angolare aumenta linearmente nel tempo.

$I \propto d^2$; $I = 2md^2$

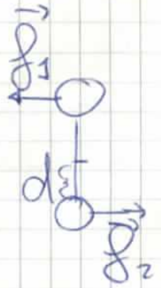
cioè I dipende dal quadrato della distanza dal centro di massa:



I due oggetti a parità di forza applicata si muovono allo stesso modo (essendo la massa totale uguale)

Per quanto riguarda il moto traslatorio ciò che conta è la massa totale.

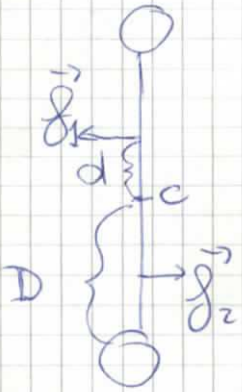
Consideriamo forze non applicate nel centro di massa.



(Applichiamo lo stesso momento (stessa distanza dal centro).)

(Il momento d'inerzia del secondo è maggiore perché $D > d$;)

$\underline{I = 2 m d^2}$



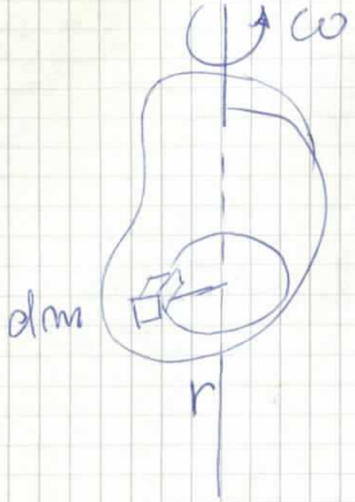
$I_1 = 2 m d^2$ $\qquad$ $I_2 = 2 m D^2$

Se noi applichiamo lo stesso momento di forze l'accelerazione angolare dipende da come sono distribuite le masse; l'accelerazione angolare è maggiore per il sistema che ha le masse applicate più vicine. ; $\dot{\omega} = \frac{M^{(e)}}{I}$; più grande è I più piccola è l'accelerazione.

Per quanto riguarda il moto traslatorio le 3 grandezze fondamentali sono la massa, la forza, l'accelerazione del centro di massa.

Per quanto riguarda il moto rotatorio sono: l'accelerazione angolare, il momento delle forze applicate ed il momento d'inerzia.

Corpo rigido che ruota intorno ad un asse.



$\vec{p}$?

$d\vec{p} = dm\, \vec{\omega}\, r^2$

$\vec{\omega}$ è uguale per tutti i pti.

$$\vec{p} = \int_M r^2 \vec{\omega}\, dm = \vec{\omega} \underbrace{\int_M r^2 dm}_{} = I\vec{\omega}$$

I : momento d'inerzia del corpo rigido

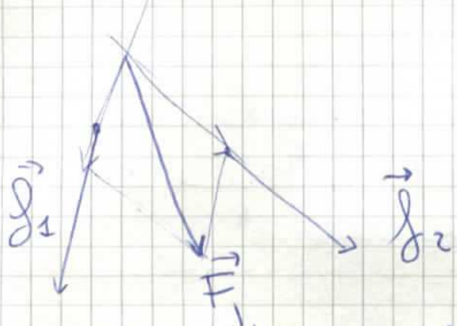
$$\begin{cases} M\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)} \\ \dfrac{d}{dt}\left(I_c \vec{\omega}\right) = \vec{M}_c^{(e)} \end{cases}$$

Spostamento del centro di massa

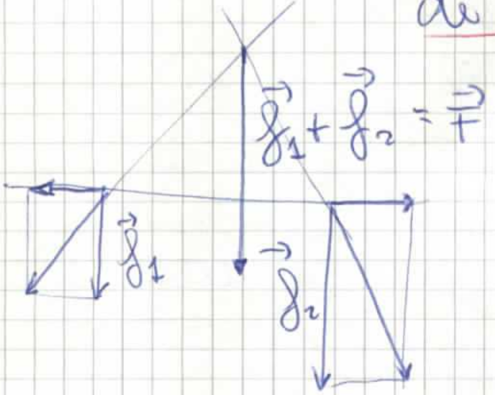
Come ruota il corpo intorno al centro di massa

|| La rotazione avviene a seconda del momento del centro di massa ||

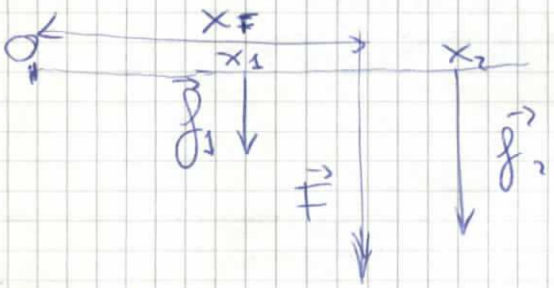
risultante:



il risultante del sistema di forze



avendo un numero maggiore di forze:



$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

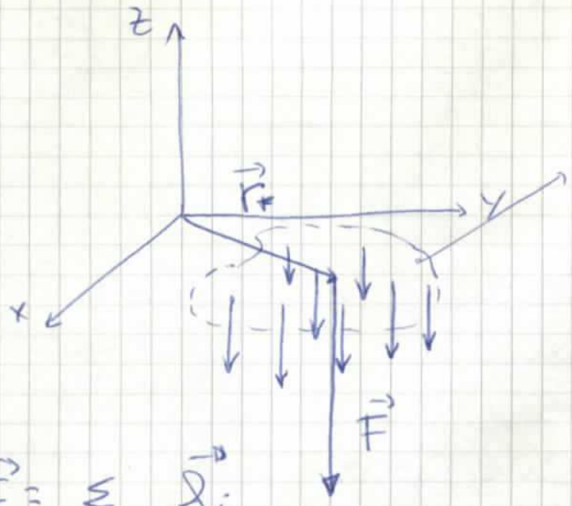
Cerchiamo un sistema risultante di forze con uguale risultante ed uguale momento risultante rispetto ad un qualsiasi pol.

momento di F rispetto ad O.

$$x_F\, F = \underbrace{f_1 x_1 + f_2 x_2}_{\text{momenti di } f_1 \text{ e } f_2 \text{ rispetto ad } O.}$$

$$x_F = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2}{f_1 + f_2}$$

posizione media pesata (con le forze)



proiezione sul piano xy di un fascio di forze.

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i$$

$$\vec{r}_F = \frac{\sum f_i \vec{r}_i}{F}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)} \\ \dfrac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} = \vec{M}_{\Omega}^{(e} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega \text{ fisso} \\ \Omega \equiv \text{centro di massa} \end{cases}$$

$$\vec{P} = I\vec{\omega}$$

per un corpo rigido

$$\begin{cases} M\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)} \\ \dfrac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \vec{M}^{(e)} \underset{\text{se } I = \text{cost}}{\Longrightarrow} I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}^{(e)} \end{cases}$$

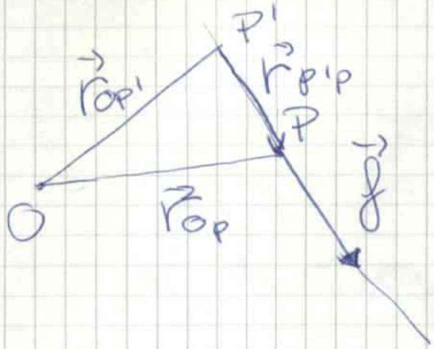
PARALLELISMO TRA LE FORMULE

$\begin{cases} M \text{ : massa inerziale} \\ I \text{ : momento d'inerzia} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{a}_c \text{ : accelerazione del centro di massa} \\ \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ : accelerazione angolare.} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \text{forze esterne} \\ M^{(e)} = \text{momento delle forze esterne} \end{cases}$

|| Per il calcolo del modulo del risultante e della sua direzione abbiamo già discusso. ||



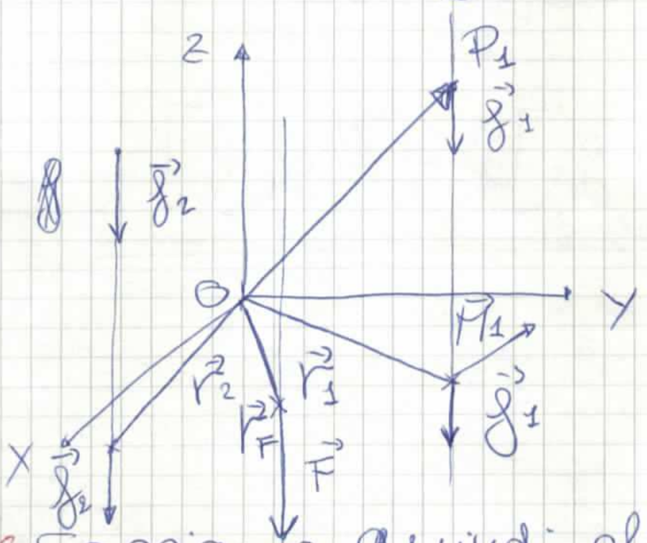
P' ∈ retta di azione della forza

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{OP} \times \vec{f}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{OP'} \times \vec{f} + \underbrace{\vec{r}_{P'P} \times \vec{f}}_{0\text{: sono paralleli.}}$$

scomponendo $\vec{r}_{OP}$ in 2 vettori

Il momento rispetto ad O non cambia cambiando P in P': si può scegliere il punto che preferiamo sulla retta di azione della forza.



Possiamo portare $\vec{f}_1$ sul piano xy:

Sappiamo quindi che il momento giace sul piano xy

diretta lungo $(-y)$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 = (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}) \times (\overbrace{-f_1 \hat{k}}) =$$

$$= x_1 f_1 \hat{j} - y_1 f_1 \hat{i}$$

$$\vec{M}_2 = x_2 f_2 \hat{j} - y_2 f_2 \hat{i}$$

Facendo la somma dei momenti di N forze avremo:

$$\vec{M} = \left[\sum_1^N x_i f_i\right]\hat{j} - \left[\sum_1^N y_i f_i\right]\hat{i}$$

Abbiamo espresso il momento delle forze esterne parallele.

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i$$

Non sappiamo $\vec{r}_f$, ma sappiamo che il momento del risultante deve essere uguale alla somma dei momenti parziali

$$x_F F \hat{j} - y_F F \hat{i} = \left[\sum_1^N x_i f_i\right]\hat{j} - \left[\sum_1^N y_i f_i\right]\hat{i}$$

proiettando:

$$\begin{cases} x_F = \dfrac{1}{F} \sum x_i f_i \\ y_F = \dfrac{1}{F} \sum y_i f_i \end{cases}$$

Media pesata (il peso è F)

$$\boxed{\vec{r}_F = \frac{1}{F} \sum \vec{r}_i f_i}$$

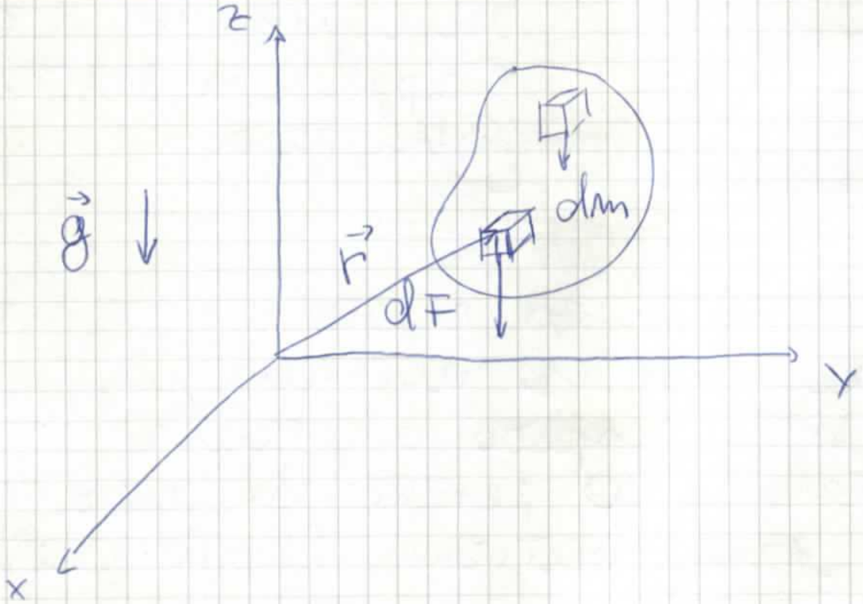
il vettore giace sul piano x y.

Risultato generale perché si può prendere un pto qualsiasi sulla retta d'azione.

$$\begin{cases} \vec F = \sum \vec f_i \\ \vec r_F = \dfrac{1}{F} \sum \vec r_i f_i \end{cases}$$

il risultante di un sistema di rette parallele.

$$\vec M = \vec r_F \times \vec F$$



Possiamo considerare il corpo come soggetto all'azione di tante forze parallele

$$d\vec f = dm\,\vec g$$

somma su elementi infinitesimi.

$$\vec F = \sum \vec f_i = \int_{Massa} \vec g\,dm = \int_{Massa} \vec g\,dm$$

Con masse non molto estese consideriamo l'accelerazione di gravità costante.

$$\vec F = \vec g \int_M dm = M\,\vec g$$

$$\vec r_F = \frac{1}{F}\int_{Massa} \vec r\,dm\,\vec g = \int_{Massa} \vec r\,g\,dm \Big/ F =$$ centro di massa

$$\frac{\int_{MASSA} \vec r\,\vec g\,dm}{\int \vec g\,dm} = \frac{g\int_{massa} \vec r\,dm}{g\int_{massa} dm} = \frac{\int \vec r\,dm}{M} = \vec r_c$$

$M\vec{a}_c = \vec{F}$

La forza nel nostro caso particolare è applicata nel centro di massa

$\cancel{M}\vec{a}_c = \cancel{M}\vec{g} \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{g}$

Il centro di massa si muove come un pto materiale a cui è applicata tutta la forza peso.

Un corpo esteso cade senza ruotare: la rotazione si avrebbe se avessimo un momento della forza rispetto al centro di massa che però è 0 perchè la retta di azione della forza contiene il pto centro di massa.
La forza peso non fa variare la velocità angolare.

BARICENTRO: centro delle forze applicate (se la $\vec{g}$ = cost allora il baricentro coincide con il centro di massa).