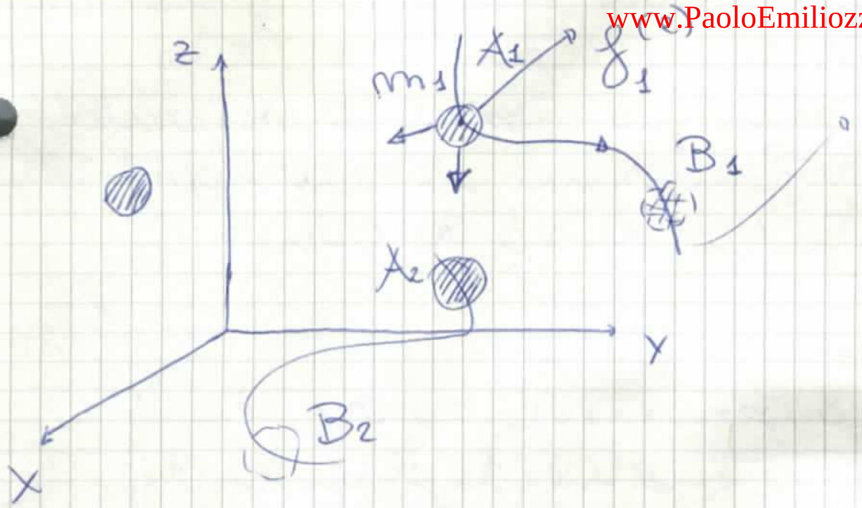
# LAVORO ed ENERGIA CINETICA.




Traiettoria della massa $m_1$.

{ E' calcolabile il lavoro fatto dalle forze per portare $m_1$ dalla posizione $A_1$ alla $B_1$ distinguendo da forze interne ed esterne. }

$$L_{A_1B_1} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_1 \cdot d\vec{s}_1 = L^{(e)}_{A_1B_1} + L^{(i)}_{A_1B_1} = K_{B_1} - K_{A_1}$$

|| Il lavoro è possibile scriverlo per ogni massa. ||

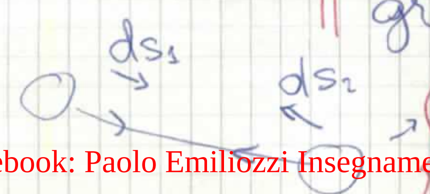
$$L_{A_2B_2} = L^{(e)}_{A_2B_2} + L^{(i)}_{A_2B_2} = K_{B_2} - K_{A_2}$$

Facendo la somma si ottiene il lavoro totale

A: configurazione iniziale; B: config. finale.

$$L_{AB} = L^{(e)}_{AB} + L^{(i)}_{AB} = K_B - K_A$$

|| Per il lavoro il termine non si annulla (a differenza delle altre grandezze). ||




{ Lavoro positivo in tutti e due i casi (spostamento e verso della forza). }

Se abbiamo a che fare con un corpo rigido le forze interne non compiono lavoro fino a che il sistema può essere considerato rigido; le masse infinitesime si attraggono, ma essendo vincolate (corpo rigido) non si spostano $\underline{L^{(i)} = 0}$.

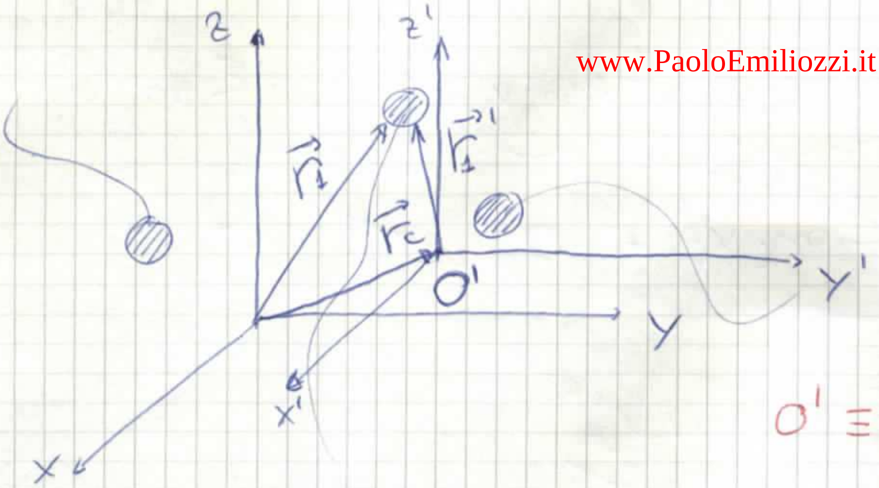
Se le forze sono conservative allora è introducibile il lavoro come differenza di energia potenziale.

$$\begin{cases} L_{A_1B_1} = U(A_1) - U(B_1) \\ L_{A_2B_2} = U(A_2) - U(B_2) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

$$\underline{L_{AB} = U(A) - U(B)}$$

$$K_B - K_A = U(A) - U(B)$$

$$\underline{K_B + U(B) = K_A + U(A) = E}$$ Energia meccanica del sistema.




$O' \equiv$ centro di massa

$$\boxed{K = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_c = \dfrac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i \\ \vec{v}_c = \dfrac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i \end{cases}$$

Ci mettiamo su un sistema di riferimento con origine nel centro di massa.

$$\begin{cases} \vec{r}_c' = \dfrac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i' = 0 \\ \vec{v}_c' = \dfrac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i' = 0 \end{cases}$$

scalare

$$v_1^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i' \\ \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i' \end{cases}$$

$$v_1^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_c + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}_i) =$$

$$= v_c^2 + v_i'^2 + 2\, \vec{v}_c \cdot \vec{v}_i'$$

$$K = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \Sigma v_c^2 m_i}_{} + \underbrace{\frac{1}{2} \Sigma m_i v_i'^2}_{} + \underbrace{\frac{2}{2} v_c \cdot \overbrace{\Sigma m_i v_i'}^{0}}_{0}$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i'^2 + 0$$

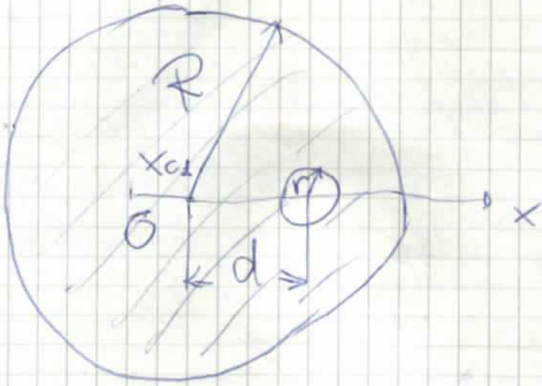
$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M v_c^2}_{} + \underbrace{\frac{1}{2} \Sigma m_i v_c'^2}_{}$$

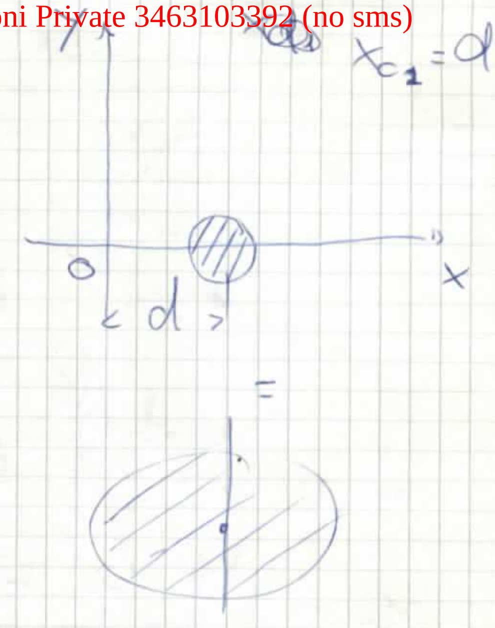
energia cinetica di tutta la massa che si muove con la velocità del centro di massa.

$K'$ energia cinetica misurata nel sistema del centro di massa

TEOREMA DI KÖENIG

$x_{c_1} = ?$




$x_c = 0$

Dov'è il centro di massa?

$$M_1 = \sigma \pi (R^2 - r^2)$$

$$M_2 = \sigma \pi r^2$$

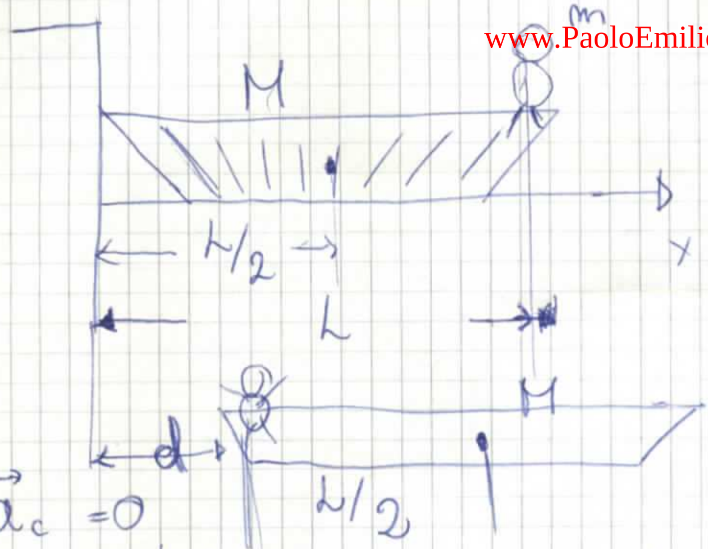
$$\frac{M_1 x_{c_1} + M_2 x_{c_2}}{M_1 + M_2} = x_c = 0$$

$$x_{c_1} = -\frac{M_2}{M_1} x_{c_2}$$

$$x_{c_1} = -\left(\frac{r^2}{(R^2 - r^2)}\right) d$$

$R - d$: max valore che potrebbe avere il raggio del disco ($r$)




$F^{(e)} = 0$
↓
forza peso bilanciata dalla reazione normale

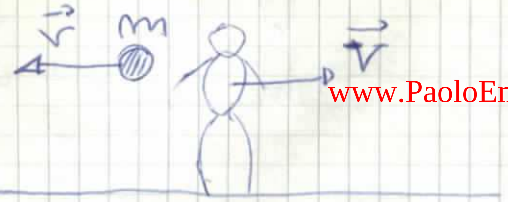
$m\vec{a}_c = 0$

$$x_c = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{M+m} = \frac{M\left(\frac{L}{2}+d\right)+md}{M+m}$$

$$M\frac{L}{2} + mL = M\left(\frac{L}{2}+d\right) + md$$

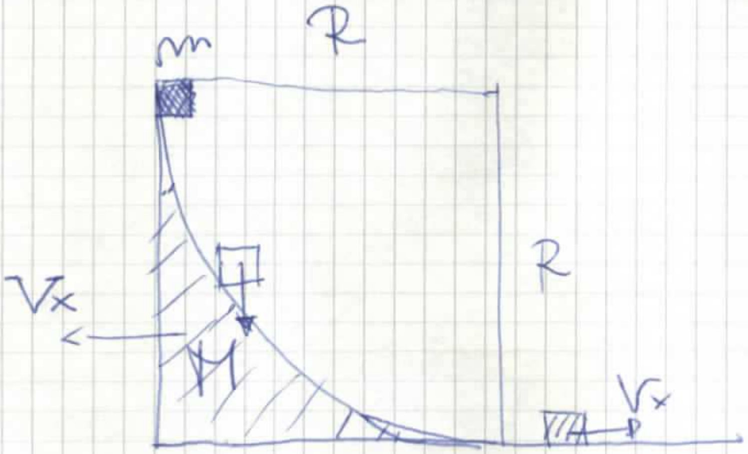
$d = \frac{m}{M+m}L$ ← di quanto si è spostata la barca una volta che l'uomo si è spostata.




$$v_c = \frac{M\vec{V} = m\vec{v}}{M+m} = 0$$

$$V = -\frac{m}{M}\vec{v}$$




Ci sono solo forze interne (forza peso della rampa bilanciata dal vincolo; la forza peso di quello piccolo bilanciata da noi.)

La forza peso è una forza esterna, ma va solo verso il basso (scomponendo si ottiene che la quantità di moto lungo x si conserva, lungo y varia).

$$\vec{Q} = m\vec{V} + m\vec{v}$$

$$Q_x = M V_x + m v_x = 0$$

L'energia gravitazionale della massa grande non varia, quella della massa piccola sì.

$$E_f = E_i$$

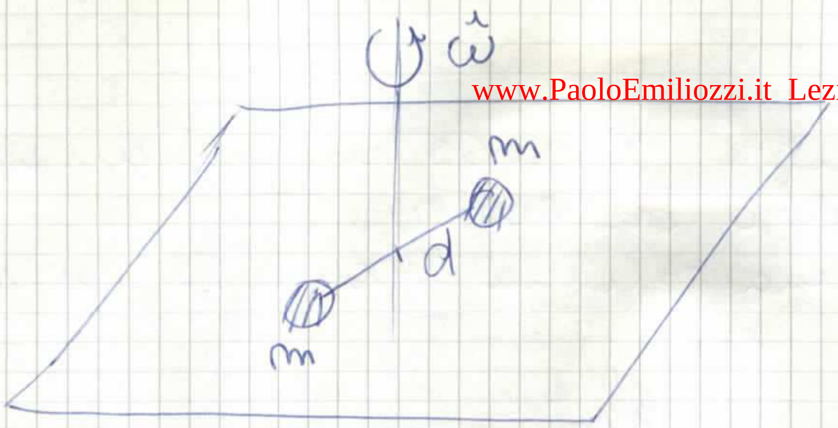
Conservazione ~~della~~ dell'energia

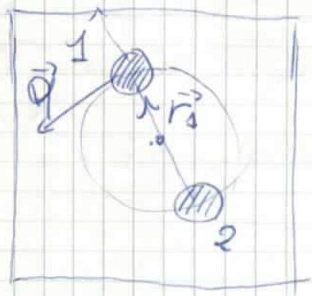


$$\underbrace{mgR}_{U_{m\,i}} + \underbrace{M\cancel{g}h}_{U_{M\,i}} = \underbrace{M\cancel{g}h}_{U_{M\,f}} + \underbrace{\frac{1}{2}m v_x^2}_{K_{m\,f}} + \underbrace{\frac{1}{2}M V_x^2}_{K_{M\,f}}$$



Abbiamo 2 eq. con due incognite




Per mettere in rotazione si applicano due forze con risultante nullo e momento risultante diverso da 0: gli effetti sono: il centro di massa deve rimanere fermo $\frac{d\vec{Q}}{dt} = m\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)} = 0$, il sistema si mette in rotazione intorno al centro di massa.
Non applicando più la forze esterne se non c'è attrito il momento angolare si conserva ed il sistema continua a ruotare con una certa velocità angolare attorno al centro di massa

$$\begin{cases}\vec{q}_1 = m\vec{v}_1 = m d \omega \hat{r}_1 \\ \vec{q}_2 = m\vec{v}_2 = m d \omega \hat{r}_2\end{cases} \quad \vec{Q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$$

$$\begin{cases}\vec{P}_1 = \underbrace{\vec{r}_1}_{d} \times \underbrace{\vec{q}_1}_{md\omega} \left(\text{vettore uscente } /\!/ \text{ a } \omega\right) = md^2\omega\hat{\omega} = md^2\vec{\omega} \\ \vec{P}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{q}_2 = d \cdot md\omega\hat{\omega} = md^2\vec{\omega}\end{cases}$$

mentre le due componenti della quantità di moto si annullano per i momenti angolari si ha:

$$\vec{P} = 2\,md^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$



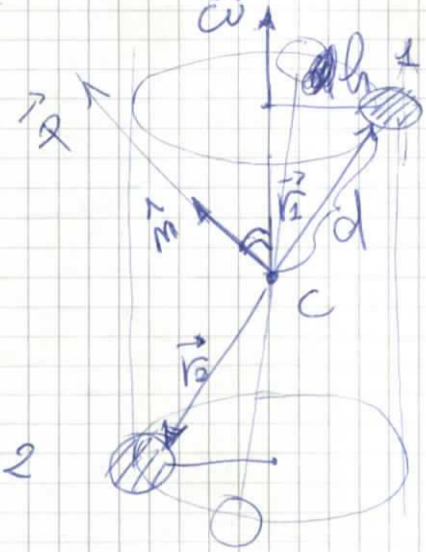
d: distanza del pto materiale dall'asse di rotazione

$\vec{P} \,//\, \vec{\omega}$



Si verifica sempre quando un sistema è in rotazione libero di ruotare.

Controesempio: (sistema con un momento esterno)




Ruota mantenendo fermo il centro di massa

Ci deve essere un'azione (forza) esterna.

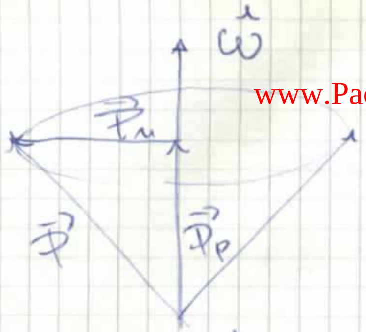
dim

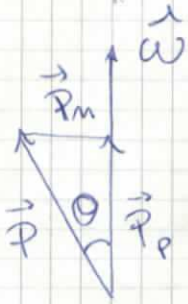
$$\begin{cases} \vec{q}_1 = m\, h\, \omega\, \tau_1 \\ \vec{q}_2 = m\, h\, \omega\, \tau_2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \vec{P}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{q}_1 = d\, m\, h\, \omega\, \hat{n} \\ \vec{P}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{q}_2 = d\, m\, h\, \omega\, \hat{n} \end{cases}\right\} \vec{P} = 2 m d\, h\, \omega\, \hat{n}$$

$\vec{P}$ non è parallelo ad $\vec{\omega}$, ma ruota intorno ad esso.
Pensiamo la velocità $\omega$ costante: il vettore $\vec{p}$ ha lunghezza costante, ma deve ruotare (la derivata temporale diversa da 0).

$\vec{p}(t)$ cioè è applicato un momento esterno cioè una coppia di forze esterne




$$\begin{cases} P_p = P\cos\theta \\ P_n = P\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

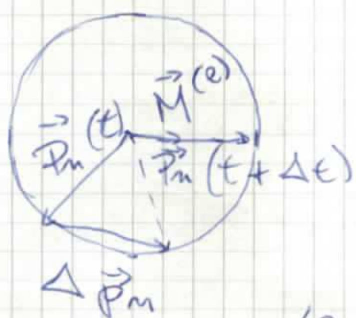
rimane costante

$$\vec{P} = \vec{P}_p + \vec{P}_n(t)$$

→ è solo la componente normale che è funzione del tempo

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M^{(e)} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_n}{dt} = M^{(e)}$$

ragionando con i Δ

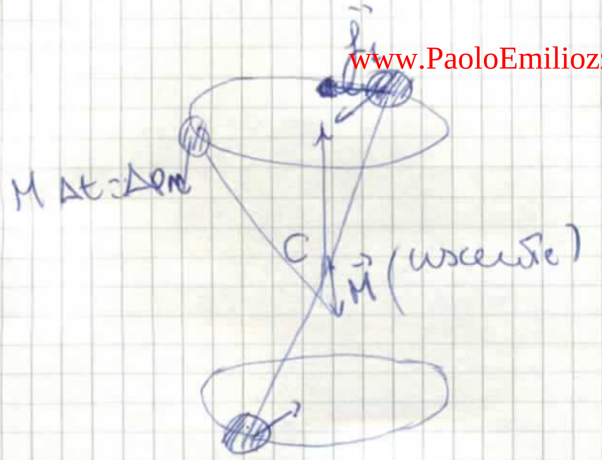



$$\Delta\vec{P}_n = \vec{M}^{(e)}\Delta t$$

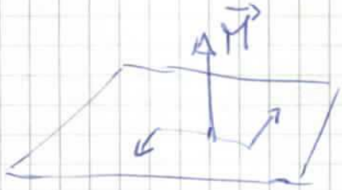
La coppia di forze deve essere parallela a Δt

↓

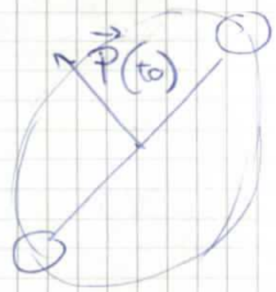
Il momento risultante della coppia di forze deve essere parallelo a $\Delta\vec{P}_n$ (essendo $\Delta t$ uno scalare)

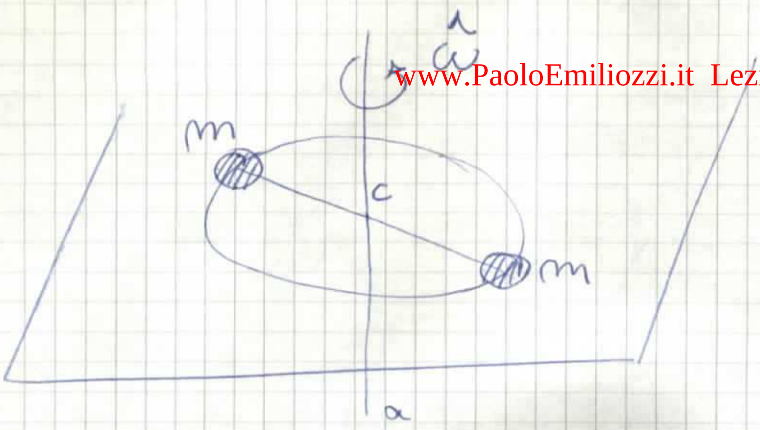



$\vec{M}$ è perpendicolare al piano dove agiscono le forze



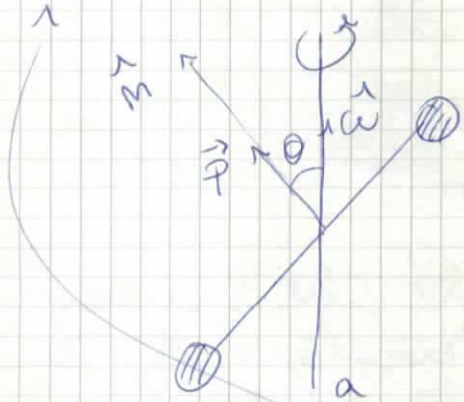

Togliamo le forze il vettore $\vec{P}$ deve rimanere costante (cambia la rotazione






$\vec{p} \parallel \vec{\omega}$

$\vec{p} = I_a \vec{\omega}$ $\quad$ $I_a = 2md^2$



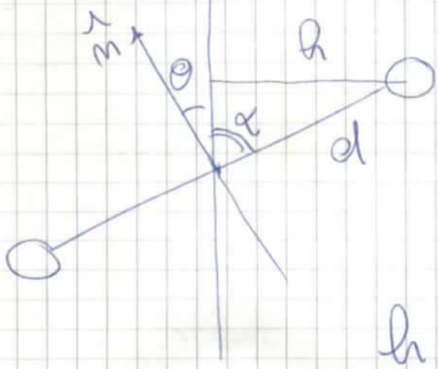

$\vec{p} \nparallel \vec{\omega}$

$P_a$ (componente assiale: proiezione sull'asse di rotazione)

$P_a = I_a \omega$ || prendendo la componente sull'asse di rotazione si ottiene una formula analoga a ||

$\vec{p} = 2md\,h\,\omega\,\hat{m}$

$P_a = p\cos\theta = 2m\,h\,\omega d\cos\theta$




$h = d \operatorname{sen}\alpha$

$h = d \cos\theta$

$$P_a = 2m\, h\, \omega\, \overbrace{d\cos\theta}^{h}$$

$$P_a = 2m\, h^2 \omega = I_a \omega$$

$$\boxed{P_a = I_a \omega}$$ → risultato generale: {sia che il momento angolare è // a $\vec{\omega}$ sia che il momento angolare non è parallelo ad $\vec{\omega}$.}

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{M}^{(e)}$$

proiettata sull'asse di rotazione:

$$\frac{dP_a}{dt} = M_a^{(e)}$$

Supponendo che il momento assiale si mantenga costante:

$$I_a \frac{d\omega}{dt} = M_a^{(e)}$$


Per conoscere il moto del corpo occorre sapere come si sposta il centro di massa e come ruota l'asse.
Si assegna un asse di riferimento.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t).$$

* La 1ª eq. cardinale per un corpo rigido diventa:

$$M\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)} \quad (3 \text{ eq. scalari}).$$

da questa si ricava la accelerazione del centro di massa e da questo la sua posizione.

* Per conoscere la rotazione del corpo intorno ad un asse occorre un'altra equazione:

accelerazione angolare

$$I_a \frac{d\omega}{dt} = M_a^{(e)} \quad (4^a \text{ eq.})$$

ricaviamo $\omega$.
Coordinata angolare che mi descrive il moto di rotazione intorno ad un asse

I gradi di libertà del moto di un corpo rigido che ruota intorno ad un asse e trasla sono 4.
Se gli assi sono 3 i gradi di libertà diventano 6

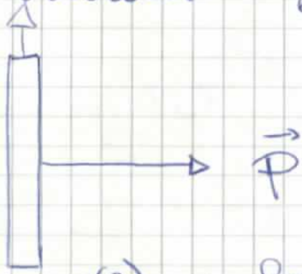
Ogni corpo rigido ha in generale almeno 3 assi di rotazione per i quali è verificata la seguente proprietà:

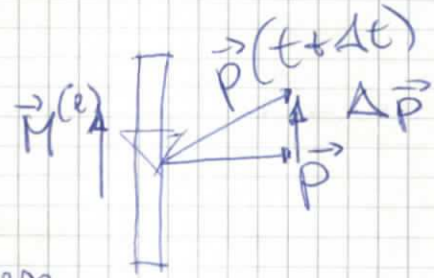
$\vec{p} \parallel \vec{\omega}$ : **ASSI PRINCIPALI DI INERZIA**

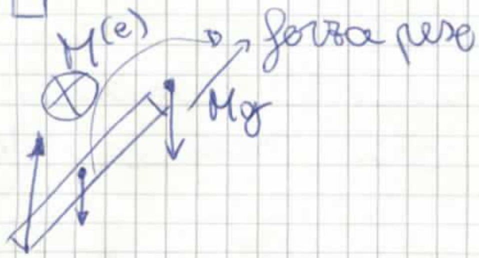
Se si pone il corpo in rotazione intorno a quegli assi esso rimane in rotazione senza sollecitazioni esterne.

In una sfera gli assi principali d'inerzia sono infiniti.

da davanti:                dall'alto



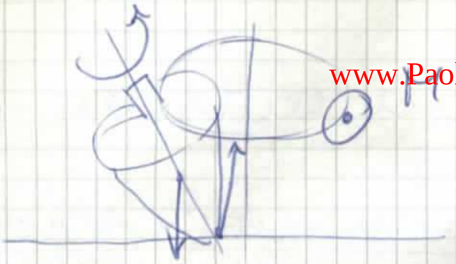




Il gruppo di forze ci dà un momento entrante nel foglio.

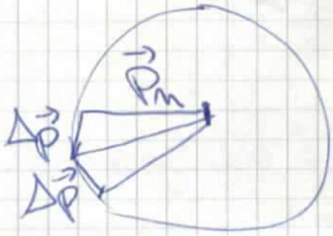
$\Delta \vec{p} = \vec{M}^{(e)} \Delta t$

Ma avendo creato un momento si ha anche una variazione del momento angolare che porta il nuovo momento angolare a far variare l'asse di rotazione e quindi la ruota gira.

La trottola non cade:



Se la trottola è inclinata allora la trottola è soggetta ad una coppia di forze che ha un momento uscente dalla lavagna.




: quindi la trottola ruota intorno all'asse verticale.

Piano senza attrito.

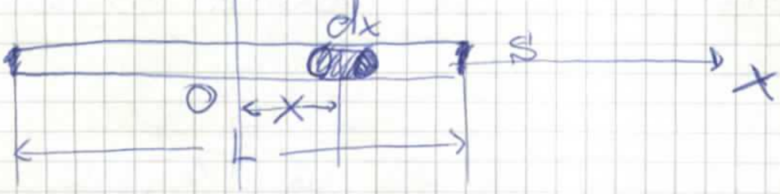
$$\begin{cases} M\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)} \\ I_a \dfrac{d\omega}{dt} = M_a^{(e)} \end{cases}$$

moto del centro di massa

moto di un corpo rigido intorno ad un asse fisso.

SBARRETTA

a (passa per il centro di simmetria)




$\rho = \dfrac{dm}{d\tau}$

La sbarretta è omogenea.

$d\tau = S\,dx$ (area di base per altezza)

$dm = \rho\, d\tau = \underbrace{\rho S}_{}\, dx$

massa per unità di lunghezza ; densità lineare

$dm = \lambda\, dx$

$dI_a = dm\, x^2$ { l'elementino simmetrico ha lo stesso momento d'inerzia }

* $I_a = 2\int_0^{L/2} x^2\, dm = 2\int_{1/2 \text{ massa}} x^2\, dm$

formalmente errato (la variabile d'integrazione deve essere una massa)

* $I_a = 2\int_0^{L/2} \lambda\, dx\, x^2 = 2\lambda \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{L/2}$

con $\lambda L = m$

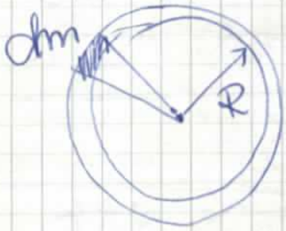
* $I_a = 2\lambda \dfrac{L^3}{3 \cdot 8_4} = \dfrac{\lambda L^3}{12} = \boxed{\dfrac{mL^2}{12}}$

254

Il momento d'inerzia varia variando l'asse
tanto più è lontano l'asse tanto più il
momento d'inerzia è maggiore

ANELLO

Sezione con dimensioni
molto più piccole
della circonferenza.
ed anello omogeneo

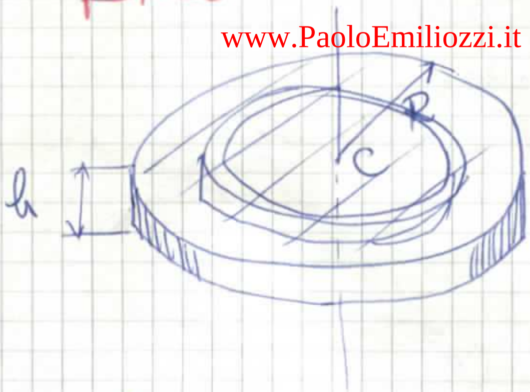




R è una costante per
tutte le masse infinitesime
dell'anello (si porta fuori
dall'integrazione)

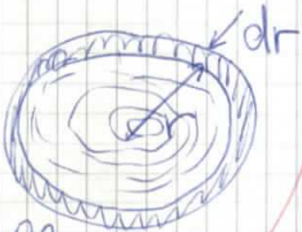
$$dI_a = dm\, R^2$$

$$I_a = \int_{Massa} R^2\, dm = R^2 \int_{massa} dm = \boxed{R^2 M}$$

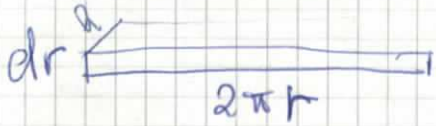
# DISCO



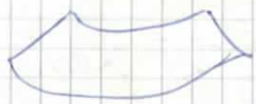

Immaginiamo il disco come composto da
da tanti anelli:




essendo dr
infinitesima si può
rettificare:




Per una superficie più
ampia si avrebbe invece:



Lavoriamo sull'anello

$$\begin{cases} dm = \rho \, dV \\ dV = 2\pi r h \, dr \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$dm = 2\pi \rho h r \, dr$$

di un anello

$$dI_a = dm \, r^2$$ ← per la legge ricavata prima per l'anello

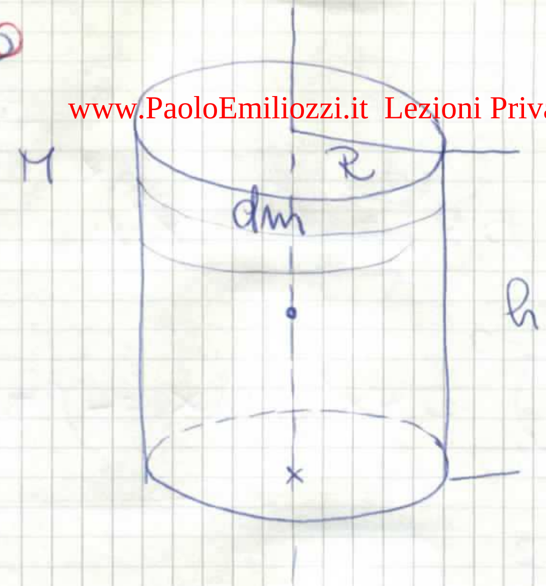
$$dI_a = 2\pi \rho h r^3 dr$$

$$\begin{cases} I_a = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr = \boxed{2\pi \rho h \frac{R^4}{4}} \\ M = \underbrace{\pi R^2 h}_{V} \rho \end{cases}$$

$$I_a = 2M \frac{R^2}{4} = \boxed{\frac{1}{2} M R^2}$$

# CILINDRO

Consideriamo il cilindro come formato da una serie di dischi

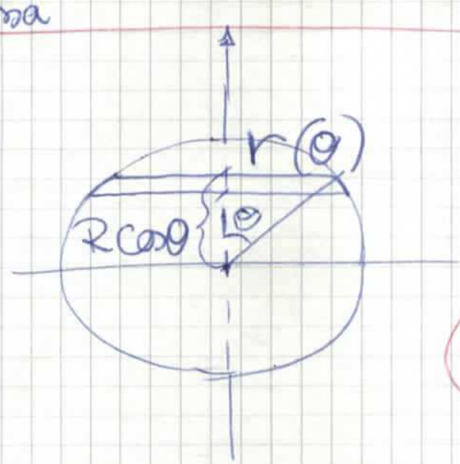



di un disco

$$dI_a = \frac{1}{2}\, dm\, R^2$$

$$I_a = \int_{Massa} \frac{1}{2} R^2\, dm = \frac{1}{2} R^2 \int_{Massa} dm = \boxed{\frac{1}{2} M R^2}$$

SFERA
(omogenea)




Il raggio del disco che troviamo varia dipendendo dall'angolo, come la massa d'altronde.

del disco

$$dI_a = \frac{1}{2}\, dm(\theta)\, r^2(\theta)$$

altezza

$$d\tau = \pi r^2(\theta)\, d(R\cos\theta)$$

$$r = R \sin\theta \qquad dm = \rho\, d\tau(\theta) = \rho \pi r^2(\theta)\, d(R\cos\theta)$$

$$dI_a = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \sin^4\theta\, d(R\cos\theta)$$

$I_a$ è il doppio di $I_a$ di mezza sfera

metà sfera

$$I_a = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \rho \pi R^4 \operatorname{sen}^4(\theta)\, d(R\cos\theta)$$

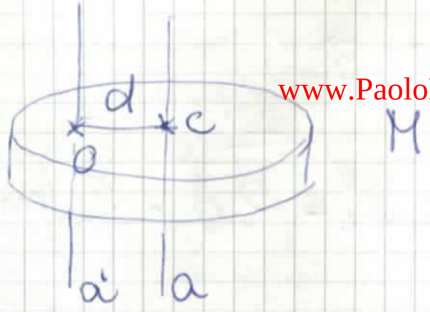
$$I_a = \rho \pi R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, d(\cos\theta)$$

$$\begin{cases} \cos\theta = x & d\cos\theta = dx \\ \operatorname{sen}^4\theta = (1-\cos^2\theta)^2 = (1-x^2)^2 \end{cases}$$

$$I_a = \rho \pi R^5 \int_1^0 (1-x^2)\,dx = -\rho \pi R^5 \int_0^1 (1-x^2)\,dx$$

$$M = \rho \, 4/3 \, \pi R^3$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$




L'asse di rotazione non è più quello principale.
Se il nuovo asse a' è // ad a:

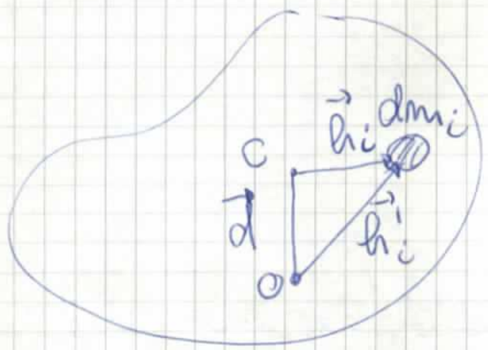
$$I_{a'} = I_a + M d^2$$ ← vale se i due assi sono paralleli

Se a' passa per il bordo $d = R$:

$$I_a = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_{a'} = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2$$

dim




per C passa l'asse principale a.
Per O passa a'

$$\vec{h}'_i = \vec{d} + \vec{h}_i$$

$$dI_a = dm_i h_i^2 = dm_i \vec{h}_i \cdot \vec{h}_i$$

$$dI_{a'} = dm_i h_i'^2 = dm_i \vec{h}'_i \cdot \vec{h}'_i =$$

$$= dm_i (\vec{d} + \vec{h}_i) \cdot (\vec{d} + \vec{h}_i) =$$

$$= dm_i \left[ d^2 + h_i^2 + 2 \vec{d} \cdot \vec{h}_i \right]$$

$$dI_{a'} = dm_i \left[ d^2 + R_i^2 + 2\vec{d}\cdot\vec{R_i} \right]$$



$$I_{a'} = d^2 \underbrace{\sum_i dm_i}_{M} + \underbrace{\sum dm_i R_i^2}_{I_a} + 2\vec{d} \cdot \underbrace{\sum dm_i \vec{R_i}}_{0}$$

$$I_{a'} = Md^2 + I_a + 0$$

Essendo C il centro di massa:

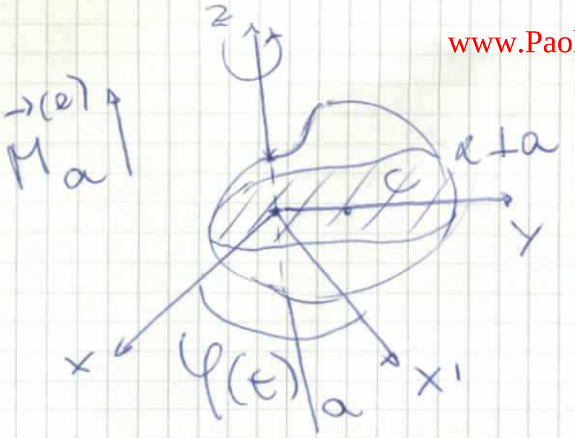
$\sum dm_i \vec{R_i}$ : posizione del centro di massa calcolata rispetto al centro di massa.

$$\vec{r_c} = \frac{1}{M}\int dm\,\vec{r} \Rightarrow M\vec{r_c} = \int dm\,\vec{r}$$

Tesi:

$$\boxed{I_{a'} = I_a + Md^2}$$

momento d'inerzia che avrebbe ~~...~~ tutta la massa concentrata nel centro di massa calcolata rispetto all'asse presa in esame




Moto con un solo grado di libertà (in rotazione intorno ad un asse)

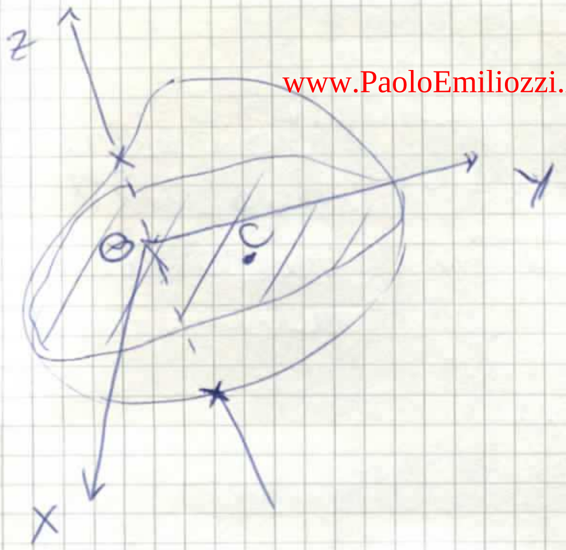
Per provocare la rotazione il momento deve avere una componente parallela all'asse (esempio della porta vincolata).

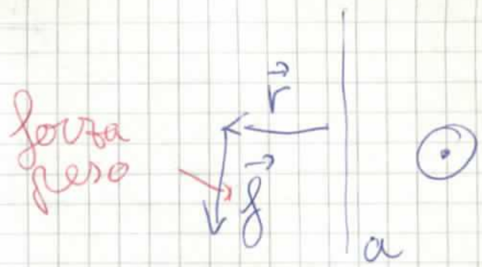
$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP_a}{dt} = M_a^{(e)} \\ &P_a = I_a\,\omega(t) \end{aligned}\right\} \quad I_a \frac{d\omega}{dt} = M_a^{(e)}$$

$\varphi(t)$ ci descrive la posizione del corpo: di quanto è ruotato nel tempo;

$$\left.\begin{cases} \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \omega \\ I_a \dfrac{d\omega}{dt} = M_a^{(e)} \end{cases}\right\} \quad I_a \frac{d^2\varphi}{dt} = M_a^{(e)}$$

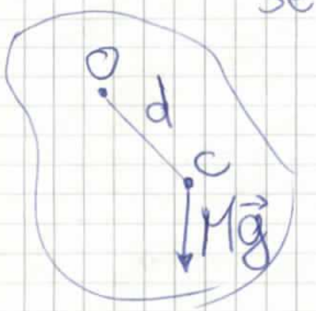
è sufficiente una coordinata (l'angolo $\varphi$) per descrivere il moto di un corpo rigido intorno ad un asse.

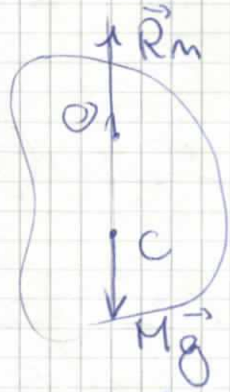



Se l'asse fosse perpendicolare avremmo un momento perpendicolare all'asse: senza movimento.

Sezione




$M\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)}$

se $\vec{a}_c = 0$ allora

$\vec{F}^{(e)} = 0$ cioè:

$M\vec{g} = \vec{R}_m$.

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = 0 \\ \vec{M}^{(e)} = 0 \end{cases}$$ CONDIZIONI DI STATICA

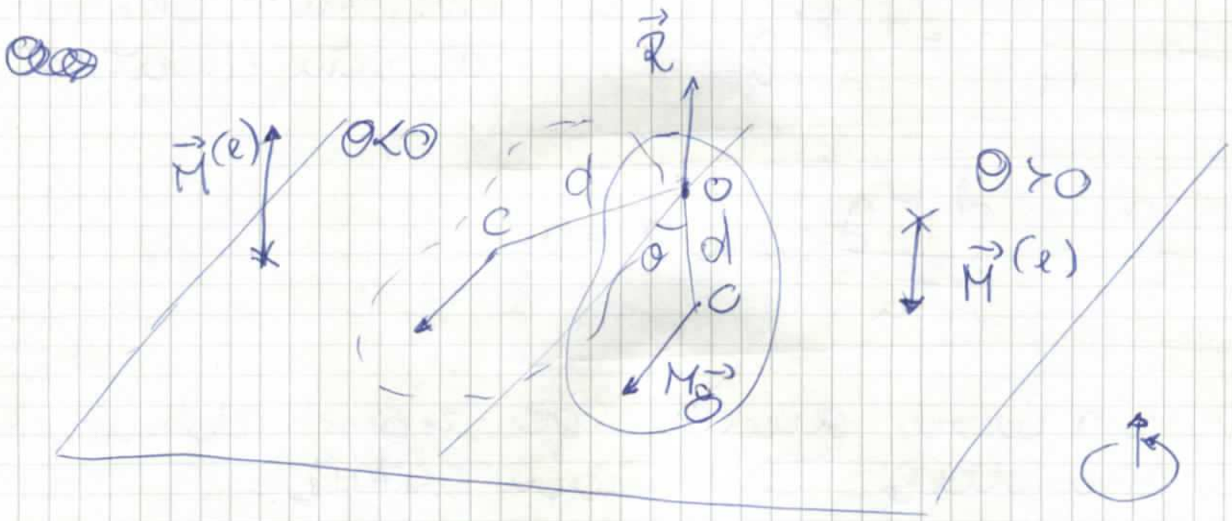
con velocità iniziale nulla

O e C allineati sulla stessa verticale le causano l'immobilità del corpo; le due forze hanno momento nullo rispetto ad O.

$\vec{M}_a^{(e)} = 0$

$\frac{d^2\varphi}{dt} = 0$ : non ci deve essere accelerazione angolare (la velocità angolare non varia)


Il momento viene parallelo all'asse di rotazione perché $\vec{R}$ e $M\vec{g}$ giacciono sullo stesso piano.




$\vec{r}_{OC} \times M\vec{g}$

$\theta > 0$ ; $\theta < 0$

$|M^{(e)}| = d \; M \; g \; \sin\theta$

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

se θ aumenta (va in senso antiorario) la derivata è positiva: $\omega > 0$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt}$$

L'accelerazione angolare a destra è negativa

$$I_a \frac{d^2\theta}{dt} = -M^{(e)}$$

$$I_a \frac{d^2\theta}{dt} = -d\,Mg \sin\theta$$

a sinistra:

$\theta < 0$ e $\frac{d^2\theta}{dt} > 0$

$$I_a \frac{d^2\theta}{dt} = -d\,Mg \sin\theta$$ (con $\sin\theta$ che però diventa negativa)

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{d\,Mg}{I_a} \sin\theta = 0}$$

{Per risolvere questa equazione abbiamo bisogno delle condizioni iniziali}

$$\ddot{\theta} + \frac{d\,Mg}{I_a}\theta = 0$$ {confondendo $\theta$ con $\sin\theta$ (per piccole oscillazioni)}

$$\theta(t) = \theta_M \sin(\Omega t + \varphi)$$

PENDOLO COMPOSTO

$$\Omega = \sqrt{\frac{d\,Mg}{I_a}}$$

$$t=0 \begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$


$L$, $M_S$ : massa sbarretta

$M_D$ : massa disco

T delle oscillazioni?

$$T = \frac{2\pi}{\omega_\Omega}$$

$$\begin{cases} I_{C_1} = \dfrac{M L^2}{12} & \text{sbarretta} \\ I_{a_S} = I_{C_1} + M_S \left(L/2\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{C_2} = \dfrac{1}{2} M R^2 & \text{disco} \\ I_{a_D} = I_{C_2} + M_D (L + R)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_a = I_{a_S} + I_{a_D} \\ M = M_S + M_D \\ d = \dfrac{1}{M}\left[ M_S (L/2) + M_D (L+R) \right] \end{cases}$$

distanza dal centro di massa

$$\Omega = \sqrt{\frac{d M g}{I_a}}$$


C descrive un moto circolare non uniforme rispetto ad O ; accelerazione tangenziale e radiale.

$\theta(t)$

$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$

$\vec{F}^{(e)} = M\vec{g} + \vec{R}$

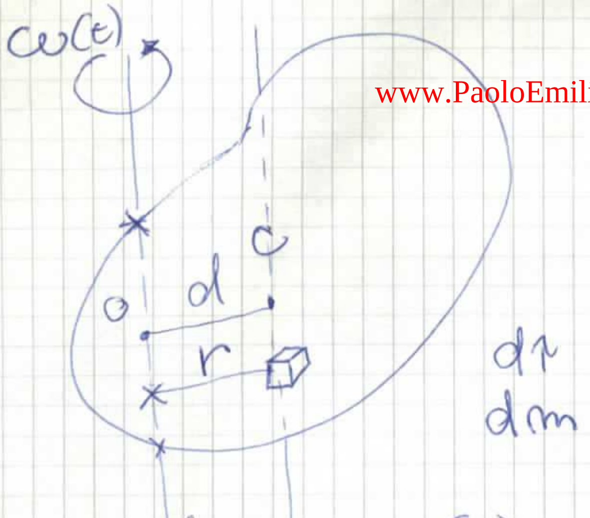
causano il moto circolare non uniforme del centro di massa

$M\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)} = M\vec{g} + \vec{R}$

$$\begin{cases} \vec{a}_\tau = \dot{\omega}\, r\, \tau \\ \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \end{cases}$$

Possiamo proiettare la 1ª eq. cardinali sui due assi $\tau$ e $r$:

$$\begin{cases} M a_\tau = (Mg)_\tau + R_\tau \\ M a_r = (Mg)_r + R_r \end{cases}$$




$v(t) = \omega(t)\, r$

energia cinetica di un elemento infinitesimo
↓

$$dK_a = \frac{1}{2}\, dm\, v^2$$

$$dK_a = \frac{1}{2}\, dm\, \omega^2 r^2$$

$$K_a = \frac{1}{2}\,\omega^2 \underbrace{\int_{Massa} dm \cdot r^2}_{\text{momento di inerzia}} = \frac{1}{2} I_a\, \omega^2$$

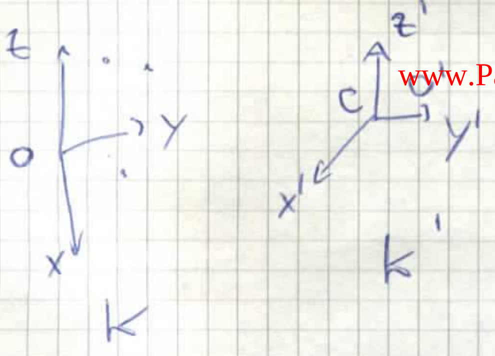
(momento di inerzia del corpo rispetto all'asse)

$$I_a = I_c + M d^2$$

momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo passante per il centro di massa

$$K_a = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M \overbrace{\omega^2 d^2}^{v_c^2} = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M v_c^2$$

Energia cinetica di rotazione che ha l'asse passante per il centro di massa + l'energia cinetica propria del centro di massa.
Analogie con il teorema di Köenig.




$$K = K' + \frac{1}{2} M v_c^2$$

$\frac{1}{2} I_a \omega^2$ * Energia cinetica misurata rispetto all'asse fisso (in analogia ad O)

$\frac{1}{2} I_c \omega^2$ * Energia cinetica misurata rispetto all'asse passante per il centro di massa (in analogia ad O')

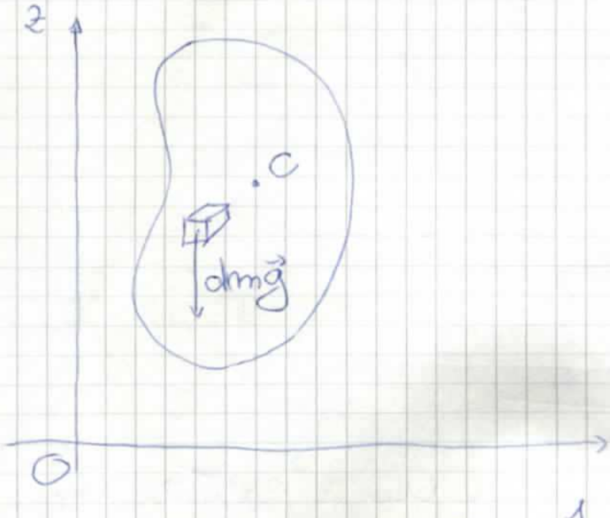
$\frac{1}{2} M v_c^2$ * Energia cinetica del centro di massa

$$\frac{1}{2} I_a \omega^2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M v_c^2$$

Teorema di Koenig per un sistema di pt. materiali.

Se le forze sono conservative: si introduce una funzione di energia potenziale.

$$K + U = E$$

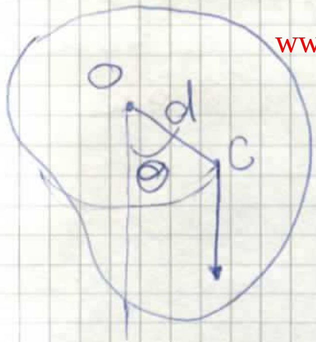



$$z_C = \frac{1}{M} \int_{Massa} dm \cdot z$$

$$dU = dm \cdot g \cdot z$$

$$U = \int_{Massa} dm \cdot g \cdot z = g \int_{Massa} dm\, z = M g z_C$$

vero se il campo di forze è parallelo.

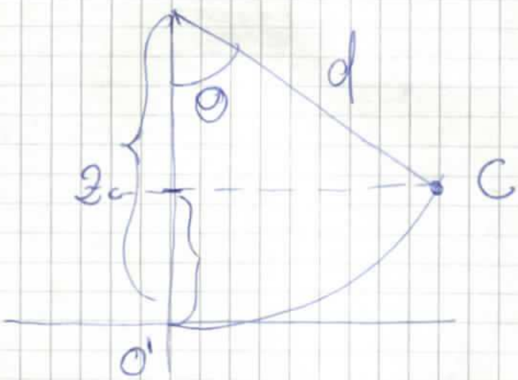



$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{Mgd}{I_a} \sin\theta = 0$$

$K(t) + U(t) = E$ è una costante

$d\left[K(t) + U(t)\right] = 0$

Calcolando questa derivata si ottiene l'equazione del moto del pendolo




$z_c = d - d\cos\theta$

$U = M g z_c$ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$K = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} I_o \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$U = Mg z_c = Mg d (1 - \cos\theta)$

$\frac{dK}{dt} =$

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = I_0 \dfrac{d\theta}{dt} \cdot \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \\ \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{dU}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = Mgd \operatorname{sen}\theta \cdot \dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

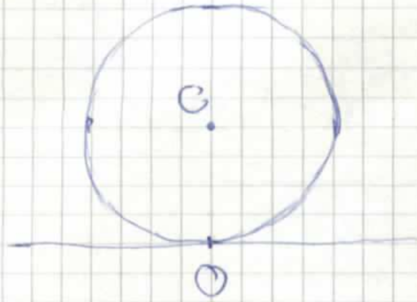
$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$$

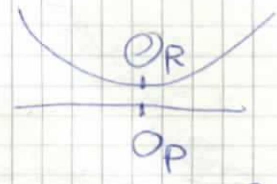
$$\frac{d\theta}{dt}\left[I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgd \operatorname{sen}\theta\right] = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgd}{I_0} \operatorname{sen}\theta = 0}$$

# MOTO ROTO TRASLATORIO

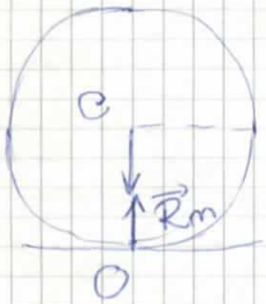





$O_P$ è fermo e affinché non ci sia scorrimento anche $O_R$ è fermo.

Consideriamo un solo pto di contatto tra ruota e piano e che non vi sia scorrimento orizzontale tra piano e ruota (il pto O è fermo)



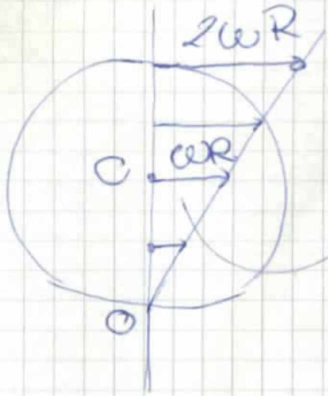

Il centro di massa non è accelerato (è sempre alla stessa altezza); la $F^{(e)}=0$ ; le forze esterne sono la forza peso e la reazione del piano che dunque sono uguali ed opposte (la somma deve essere 0).

C'è un moto di traslazione (spostamento orizzontale del centro di massa e uno di rotazione intorno al centro di massa

Si può vedere istantaneamente come un moto di rotazione intorno ad un pto fisso; O. (asse)


$$\begin{cases} V_C = \omega R \\ V_A = 2\omega R \\ V_O = 0 \end{cases}$$

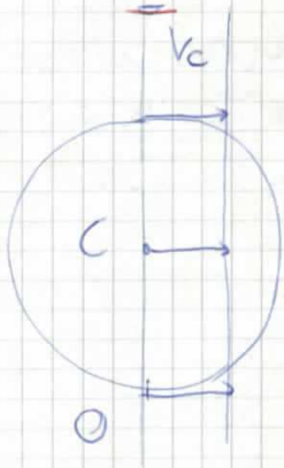
intorno all'asse perpendicolare al foglio passante per O.




* La velocità è proporzionale alla distanza

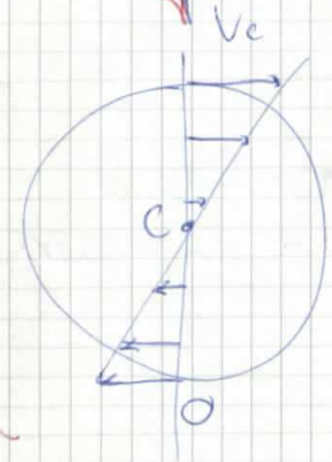
* Campo di velocità: i vettori che danno ampiezza e direzione della velocità in ogni pto.

=




* Moto di traslazione: ogni pto si muove con la stessa velocità del centro di massa.

+

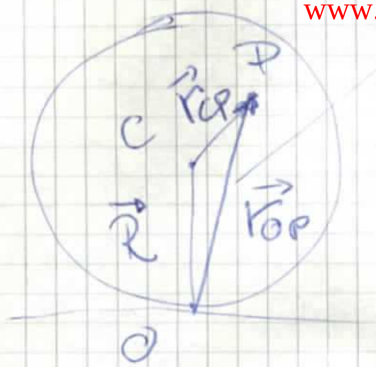



* Moto di rotazione intorno al centro di massa che ha velocità 0.

Moto rototraslatorio come somma di due moti: uno traslatorio uno di rotazione asse istantaneo di rotazione

entrante

$\vec{\omega}$ $\otimes$



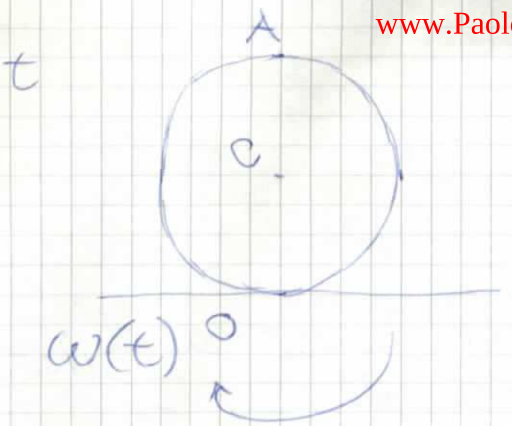

Ogni pto descrive una traiettoria circolare (in intervalli di tempo infinitesimi) (altrimenti la traiettoria è un cicloide)

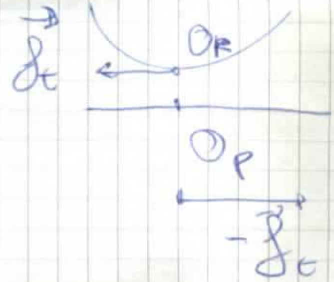
$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP} \\ \vec{r}_{OP} = \vec{R} + \vec{r}_{CP} \end{cases}$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r}_{CP})$$

$$* \quad \vec{v}_P = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{R}}_{\text{velocità istantanea di C; } \vec{v}_C} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}}_{\text{velocità di rotazione di P intorno al centro di massa; } \vec{v}_{rC}}$$

$$\vec{v}_P = \underset{\text{moto di traslazione}}{\vec{v}_C} + \underset{\text{moto di rotazione}}{\vec{v}_{rC}}$$



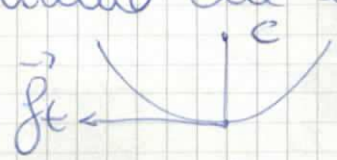

C'è attrito?
Azione esercitata dal piano.
Il corpo rotola da solo senza che nessuna forza sia applicata: esiste attrito?

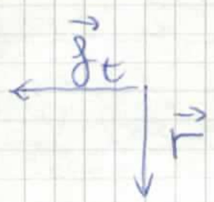
Le forze se ci sono non compiono lavoro perché il punto è fermo; se si lancia il corpo con una certa velocità angolare essa non deve variare.

$\vec{M}^{(e)} = 0$ La forza peso e la reazione non esercitano nessun momento

$I_0 \frac{d\omega}{dt} = M_0^{(e)}$ se $M^{(e)} = 0$ la velocità angolare non varia.

Supponiamo che esista una forza d'attrito $\vec{f}_t$

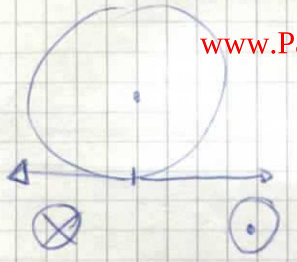



$\vec{r} \times \vec{f}_t$

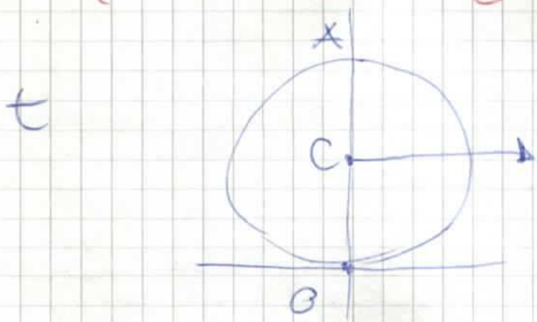
⊗

entrante e parallelo all'asse passante per O: momento assiale diverso da 0: variazione di energia cinetica

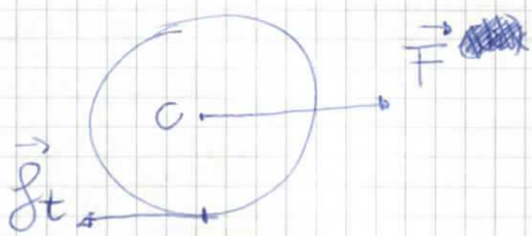


Ma variazioni di energia cinetica si può avere solo se la forza compie lavoro.

Nel pto di contatto non possono esserci forze di attrito. (se il corpo è già in moto).




Per metterlo in rotazione occorre che ci sia la forza d'attrito (altrimenti il moto sarebbe puramente traslatorio).




$$\begin{cases} M\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)} = \vec{F} + \vec{f}_t \\ I_a \dfrac{d\omega}{dt} = M_a^{(e)} \end{cases}$$

rispetto a C

rispetto ad O (l'asse fisso)

$|M_c^{(e)}| = f_t R$ è dovuto solo ad $\vec{f}_t$ perché $\vec{F} \ni C$.

$|M_o^{(e)}| = F R$ [illegible] $\vec{f}_t$ rispetto ad O (appartiene alla retta di azione della forza)

Se il corpo è fermo e noi applichiamo F otteniamo un $|M_C^{(e)}| \neq 0$ e quindi una rotazione solo se esiste la forza d'attrito:

$$|M_C^{(e)}| = f_t R$$

se $f_t = 0$ non c'è $M_C^{(e)} = 0$ e quindi il corpo non ruota.

Prendendo O come pto di riferimento:

$$I_O \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{a_C/R} = F R$$

$$\begin{cases} V_C = \omega R \\ a_C = \left(\frac{d\omega}{dt}\right) R \end{cases}$$

$$\frac{I_O}{R} a_C = F R \Rightarrow a_C = \frac{F R^2}{I_O}$$

($I_O$ momento d'inerzia della ruota rispetto ad O)

$$\begin{cases} I_C = \frac{1}{2} M R^2 \\ I_O = I_C + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2 \end{cases}$$

$$a_C = \frac{F R^2}{I_O} = \frac{F \cancel{R^2}}{M \cancel{R^2}} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \frac{F}{M}$$

Se il piano fosse stato liscio:

$$a_{C_{traslazione}} = \frac{F}{M}$$

(pto materiale che si sposta sotto l'azione di una forza esterna)

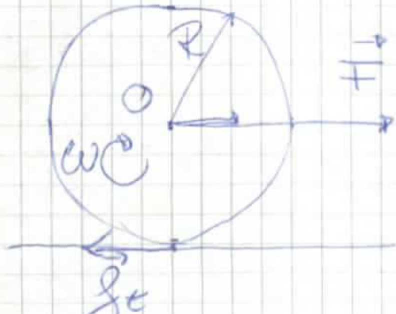
Se il corpo rotola senza strisciare l'$a_C = \frac{2}{3} a_{C_t}$

La velocità diminuisce perché l'energia cinetica è:

$$K = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

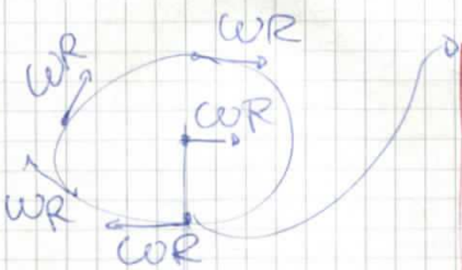
Una parte si trasferisce in energia di rotazione ed una in energia di traslazione.

Se non rotola l'energia è tutta di traslazione




$V_c = \omega R$ condizione affinché si verifichi il moto di puro rotolamento (senza strisciare).

$\omega R$ è anche la velocità di rotazione di un pto periferico rispetto al centro di massa!




dunque questo pto è fermo perché la velocità complessiva sul pto è uguale a 0

La forza tende a spostare il corpo di moto puramente traslatorio.
Supponiamo che il piano sia scabro: forza d'attrito tangenziale.
L'attrito statico serve a tenere il pto fermo.
Nel caso di un pto materiale:



$F > \mu_s R_n$ $\qquad A \leq \mu_s R_n$

Nel nostro caso il pto P è ... fermo (forza di attrito statico); si forma una coppia di forze che lo pone in rotazione

Lo strisciamento può avvenire se

$f_t > \mu_s R_n$

Se $f_t \leq \mu_s R_n$ allora questa è la condizione affinché il pto non strisci sul piano (se la forza d'attrito è inferiore del valore minimo).

proiettando:

O: asse istantaneo di rotazione

$$\begin{cases} M a_c = F - f_t \\ I_0 \dfrac{d\omega}{dt} = M_0^{(e)} \end{cases}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{FR}{I_0}$$

L'unico momento è dato dalla F perché O ∈ alla retta di azione di $f_t$ (momento nullo).

$$I_0 = \frac{3}{2} M R^2$$

$$\begin{cases} \omega(t) = \dfrac{FR}{\frac{3}{2} M R^2} t = \dfrac{2}{3} \dfrac{F}{MR} t \\ v_c(t) = \omega(t) R = \dfrac{2}{3} \dfrac{F}{M} t \\ a_c(t) = \dot{\omega} R = \dfrac{2}{3} \dfrac{F}{M} \end{cases}$$

$f_t = F - M a_c$ $\qquad a_c = \frac{2}{3}\frac{F}{M}$

$f_t = F - \frac{2}{3} F = \frac{F}{3}$

La forza tangenziale è sempre 1/3 della forza applicata orizzontalmente al centro di massa; è il motivo per cui $a_c = 2/3 \frac{F}{M}$ cioè è diminuita di 1/3 rispetto all'accelerazione che avremmo se il corpo non fosse sul piano

$\frac{F}{3} \leq \mu_s R_n$

$\frac{F}{3} \leq \mu_s Mg$

$F \leq 3\mu_s Mg$ ← solo così si può ottenere moto rotatorio

* $K(t) = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$

* $K(t) = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{R^2 \omega^2}_{V_c^2}$

* $K(t) = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{4} M V_c^2$

L'energia cinetica di rotazione intorno al centro di massa è la metà dell'energia cinetica di traslazione

$V_c(t) = \frac{2}{3} \frac{F}{M} t$

$K(t) = \frac{3}{4} M V_c^2(t)$

$K(t) = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} M \frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_3} \frac{F^2}{M^2} t^2 = \frac{1}{3} \frac{F^2}{M} t^2$

La forza $f_t$ non compie lavoro (il pto è fermo)

L'energia cinetica è il lavoro compiuto dalle forze esterne sul corpo. (forza $F$)

lavoro della forza $F$

$V_c = \frac{ds}{dt}$

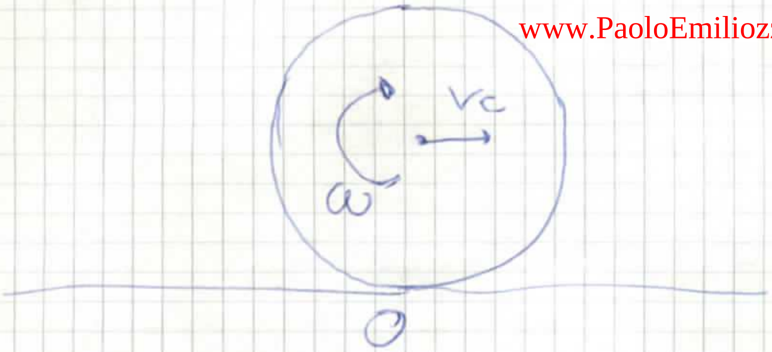
* $L = \underset{\text{è costante}}{F} \int_0^t \underset{\text{spostamento centro di massa}}{ds_c} = F \int_0^t v_c(t)\, dt =$

ulteriore dimostrazione che $f_t$ non compie lavoro.

$= F \int_0^t \frac{2}{3} \frac{F}{M} t = \frac{2}{3} \frac{F^2}{M} \frac{t^2}{2} = \frac{1}{3} \frac{F^2}{M} t^2$



Il lavoro compiuto dalle forze è pari all'energia cinetica acquisita dal corpo




Ad un certo istante, dopo che il corpo rotola, si toglie la forza.

$v_c = \omega R$

Considerando un corpo reale deformabile allora esiste una forza d'attrito:
ATTRITO VOLVENTE
dovuto a fenomeni di deformazione locale.

Nel caso ideale la forza d'attrito non c'è e non è necessario che ci sia per mantenere il corpo in rotolamento.

Supponendo che ci sia la forza d'attrito abbiamo:

$Ma_c = F^{(e)}$


La forza esterna che agisce verso sinistra tenderebbe a rallentare il corpo mentre una parte tenderebbe a farlo ruotare; non si rispetta più la condizione di puro rotolamento (o fermo):

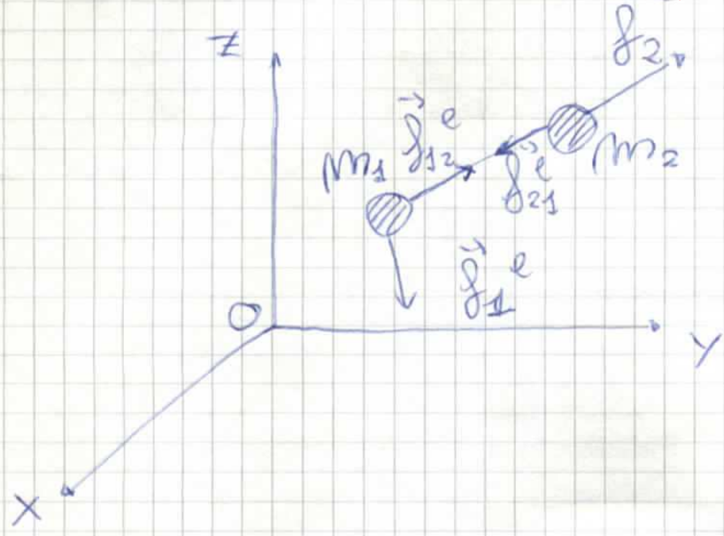
$v_c = \omega R$.

Quindi la $f_t = 0$.

Se il corpo dopo che rotola finisce su un piano di ghiaccio continua a rotolare!

Il corpo ditta verso destra con $V = \omega R$
mentre il pto O ha una velocità di
trascinamento pari a $-\omega R$.
La somma è 0 quindi il pto O è fermo.

# PROCESSI D'URTO




$$\vec f_{12}^{\,i} = -\vec f_{21}^{\,i}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec q_1}{dt} = \vec F^{(e)} = \vec f_1^{\,e} + \vec f_{12}^{\,i} \\[2mm] \dfrac{d\vec q_2}{dt} = \vec f_2^{\,e} + \vec f_{21}^{\,i} \end{cases}$$

$$\vec q = m\vec v$$

$$(t_0, t_1)$$

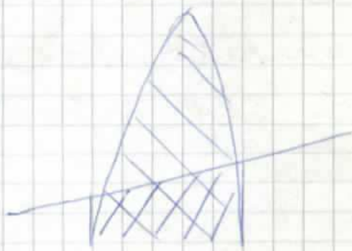
$$\int_{t_0}^{t_1} dt$$

Integriamo da $t_0$ a $t_1$ le espressioni precedenti ottenendo

$$\begin{cases} \Delta \vec q_1 (t_0, t_1) = \vec I_1^{\,e} + \vec I_{12}^{\,i} \\ \Delta \vec q_2 (t_0, t_1) = \vec I_2^{\,e} + \vec I_{21}^{\,i} \end{cases}$$

forze interne molto più grandi delle forze esterne; ad esempio il libro che cade (la forza interna è data dal fatto che il quaderno deve fermarsi; interazione tra quaderno e piano)

In questo caso il processo si definisce d'urto



: impulso delle forze interne $I^i$

: impulso forze esterne $I^e$

se $I^e << I^i$ allora si sta trattando un processo d'urto.

Nelle equazioni con $\Delta q$ possiamo trascurare $I^e$:

$$\begin{cases} \Delta \vec{q}_1 (t_0, t_1) = \vec{I}^i_{12} \\ \Delta \vec{q}_2 (t_0, t_1) = \vec{I}^i_{21} \end{cases}$$

$\vec{I}^i_{12} = -\vec{I}^i_{21}$ perché le forze interne sono uguali ed opposte.

variazione totale

$\Delta \vec{Q} = \Delta \vec{q}_1 + \Delta \vec{q}_2 = 0$ La quantità di moto si conserva

Se il processo è d'urto non cambia la quantità di moto.

$\vec{Q}(t)$ = costante

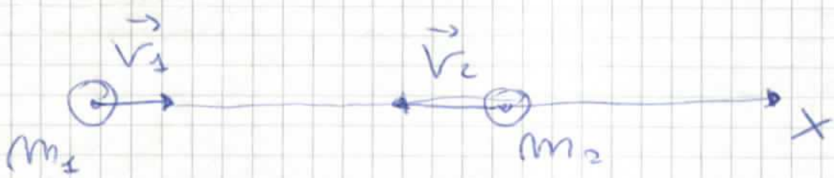
$M V_c(t)$ = costante

Processo d'urto di tipo elastico se l'energia meccanica non varia durante l'urto.

Processo d'urto anelastico se $E(t) \neq$ costante

Processo d'urto perfettamente anelastico se le due masse una volta che si urtano si fermano.

## PROCESSO D'URTO ELASTICO




urto centrale perché le velocità dei centri di massa sono sulla stessa retta.

$\vec{V}_1$ $\vec{V}_2$ ? dopo l'urto

$$\begin{cases} \vec{Q} = \text{costante} \\ E = \text{costante} \end{cases}$$

Le forze che agiscono fanno variare la velocità solo sull'asse x.

$$\begin{cases} Q_x = \text{costante} \\ E = \text{costante} \end{cases}$$

2 equazioni e due incognite ($V_1$ e $V_2$)

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} \\ \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_{1x}^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m_2 v_{2x}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_1 V_{1x}^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m_2 V_{2x}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_{1x} - V_{1x}) = m_2 (V_{2x} - v_{2x}) \\ m_1 (v_{1x}^2 - V_{1x}^2) = m_2 (V_{2x}^2 - v_{2x}^2) \end{cases}$$

dividiamo la 2ª sulla 1ª:

$$v_{1x} + V_{1x} = v_{2x} + V_{2x}$$

$$V_{2x} = v_{1x} - v_{2x} + V_{1x}$$ (sostituendo nella 1ª

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 V_{1x} + m_2 (v_{1x} - v_{2x} + V_{1x})$$

$$v_{1x}(m_1 - m_2) + v_{2x}(2m_2) = V_{1x} \underbrace{(m_1 + m_2)}_{M}$$

$$\begin{cases} V_{1x} = \left(\frac{m_1 - m_2}{M}\right) v_{1x} + \frac{2m_2}{M} v_{2x} \\ V_{2x} = \left(\frac{m_2 - m_1}{M}\right) v_{2x} + \frac{2m_1}{M} v_{1x} \end{cases}$$

velocità dopo l'urto

* Supponendo che $m_1 = m_2$ ;

$$\begin{cases} V_{1x} = v_{2x} \\ V_{2x} = v_{1x} \end{cases}$$

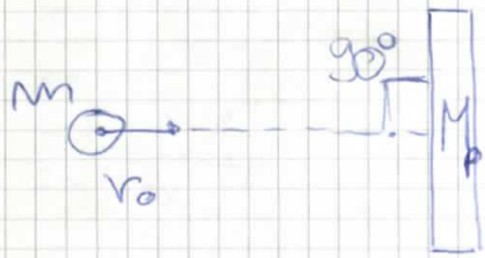
Nell'urto si scambiano di velocità.

* se $v_{2x} = 0$

$$\begin{cases} V_{1x} = 0 \\ V_{2x} = v_{1x} \end{cases}$$

dopo l'urto la massa lanciata si ferma e l'altra parte con la velocità di quella prima.

**




$v_{2x} = 0$ ma $m_1 \neq m_2$

$$\begin{cases} V_{1x} = \left(\dfrac{m - M_p}{m + M_p}\right) v_0 \\ V_{2x} = \left(\dfrac{2m}{m + M_p}\right) v_0 \end{cases}$$

Se $M_p >> m$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} V_{1x} = -v_0 \\ V_{2x} \cong 0 \end{cases}$$

Urto su una parete massiccia.

$\Delta t$: durata del processo d'urto

In realtà l'urto non è istantaneo

Variazioni delle quantità di moto.

$$\begin{cases} \Delta\vec{q}_1 = \vec{I}^{\,i}_{12} \\ \Delta\vec{q}_2 = \vec{I}^{\,i}_{21} \end{cases}$$

$$\Delta\vec{Q} = 0$$

$$\Delta\vec{q}_1 = m\vec{V}_1 - m\vec{v}_1$$

$$\Delta\vec{q}_{1x} = -mv_0 - mv_0 = -2mv_0$$

$$\Delta\vec{q}_{1x} + \Delta q_{ex} = 0$$

$$\Delta q_{2x} = -\Delta q_{1x} = 2mv_0$$

è un termine finito

$$K = \frac{1}{2}\frac{m^2 v_0^2}{M} \underset{M \to \infty}{\overset{\sim}{=}} 0$$

La velocità finale della parete è 0; la sua energia cinetica è nulla

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{m}$$

La quantità di moto è importante perché se sappiamo la durata dell'urto allora possiamo conoscere la forza con cui la massa ha premuto sulla parete

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \qquad \langle F_x \rangle = \frac{\Delta q_{2x}}{\Delta t}$$