

MATURITA' SCIENTIFICA MATEMATICA

2017

1) Ordinaria

- a. 2017 Primo problema "ruota quadrata" soluzione:
<https://www.youtube.com/watch?v=fr1lzKDCXBU&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=1>
- b. 2017 Secondo problema soluzione:
<https://www.youtube.com/watch?v=04jIZ96zhS0&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=2>
- c. 2017 Primi 5 quesiti soluzione:
<https://www.youtube.com/watch?v=i53UZzbF8xM&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=3>
- d. 2017 Ultimi 5 quesiti soluzione:
<https://www.youtube.com/watch?v=0Ha5kh7S6VY&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=4>

Analisi statistica dei quesiti usciti fino a febbraio 2017:

<https://www.youtube.com/watch?v=q8VY1jefBk&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=5>

2016

1) Ordinaria

- a. 2016 Primo problema soluzione:
<https://www.youtube.com/watch?v=uxiVM6X9Y28&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=6>
- b. 2016 Secondo problema soluzione:
<https://www.youtube.com/watch?v=iHeApsDmQN0&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=8>

2015

1) Ordinaria

- a. 2015 Primo problema soluzione:
<https://www.youtube.com/watch?v=38fid0yZDeo&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=7>
- b. 2015 Secondo problema soluzione:
<https://www.youtube.com/watch?v=XAnhJnE28P0&list=PLjFtcfmWylKm7sAvOQVV-ncy1iR0hBHFp&index=9>



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
 LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy : il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.



Figura 1

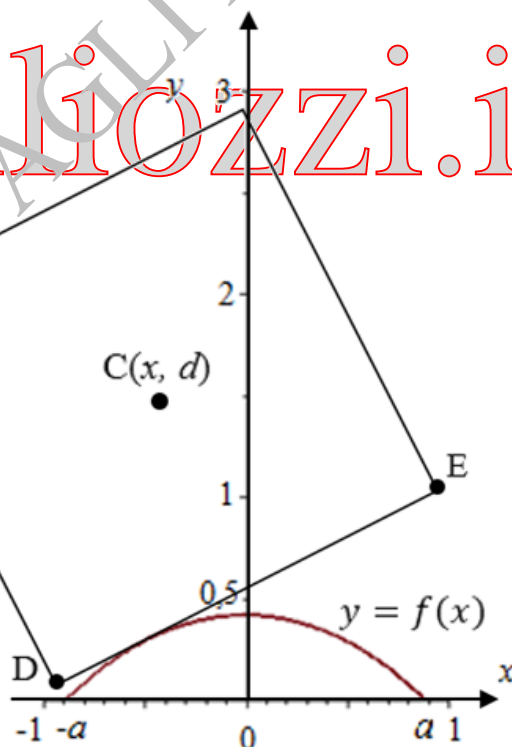


Figura 2

- 1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a; a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a; a]$, come mostrato in figura 3.

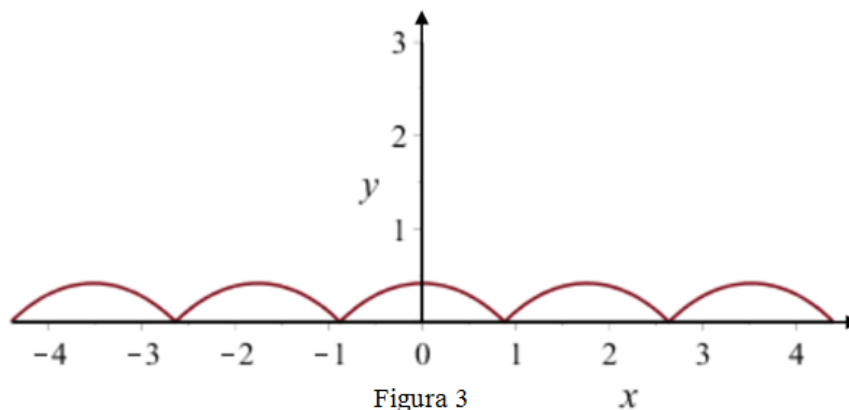


Figura 3

- 2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:
- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
 - la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una “gobba”, cioè dell’arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a; a]$.

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.¹

- 3) Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell’ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

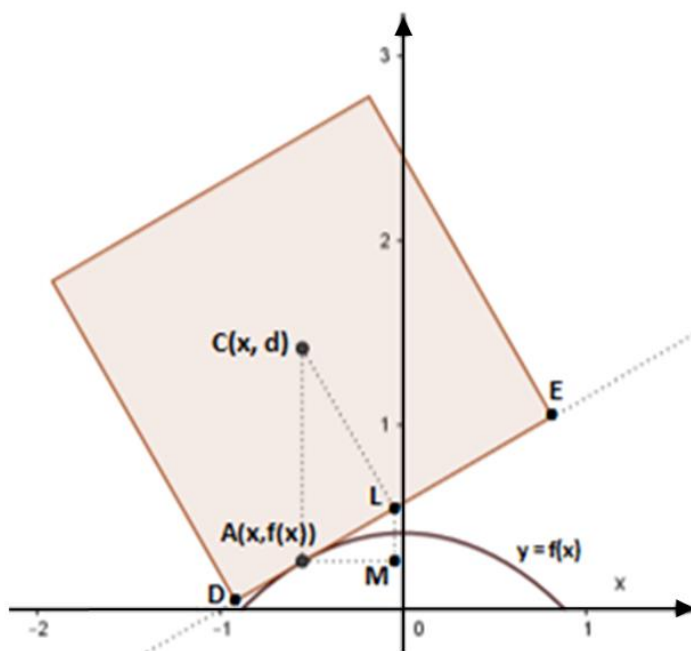


Figura 4

¹In generale, la lunghezza dell’arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

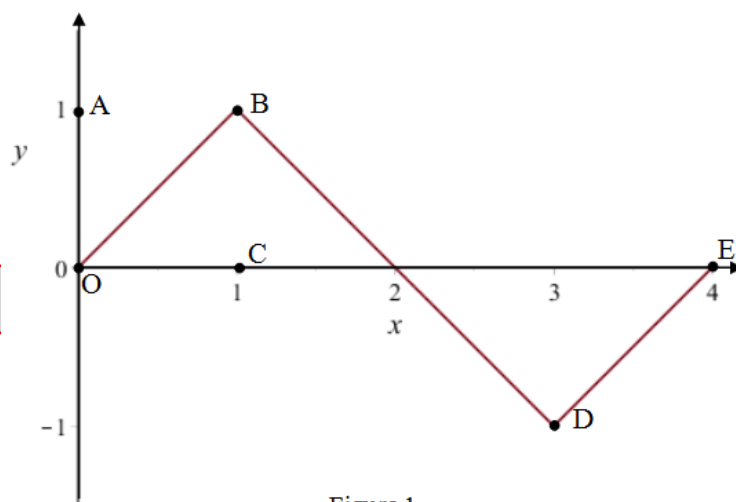


Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$.

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore.

Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

2) Considera la funzione:

$$s(x) = \text{sen}(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

- 3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad \text{e} \quad s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

- 4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x .

QUESTIONARIO

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 x e^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di e ed E .

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma emisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $3/5$ del volume della emisfera.
3. Sapendo che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 2b} - 6}{x} = 1$$

determinare i valori di a e b .

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0, 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $4/3$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

5. Dati i punti $A(-2, 3, 1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(2, 2, -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C .

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

nel suo punto P di coordinate $(1, 0, 2)$.

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

9. Dimostrare che l'equazione:

$$\operatorname{arctg}(x) + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

10. Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
 LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
 (Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettare uno che risponda alle esigenze del condominio.

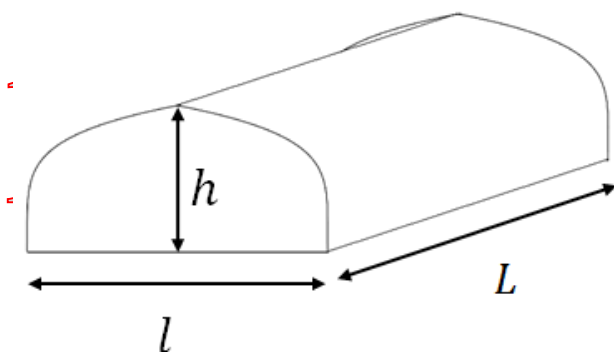


Figura 1

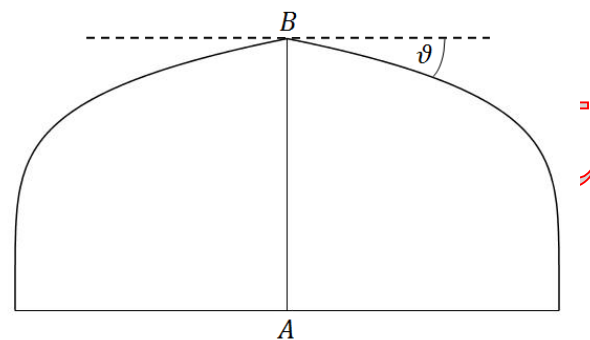


Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10^\circ$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3 , in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.
3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

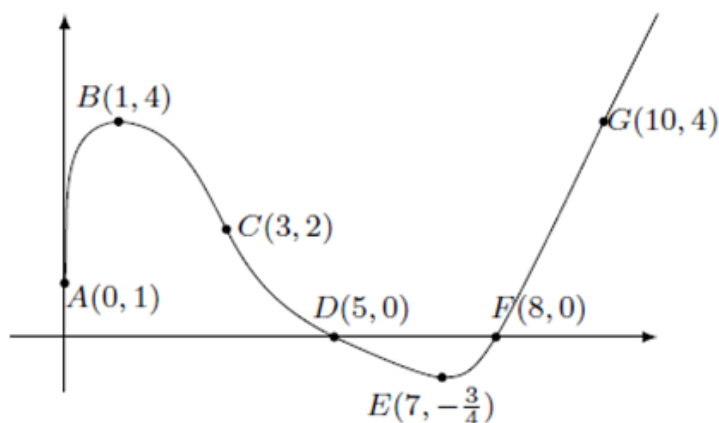


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A , che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G . Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0,8]$, il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1,7]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9,10]$.
4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

QUESTIONARIO

1. È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Stabilire se il numero reale u , tale che

$$\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx \quad B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

2. Data una parabola di equazione

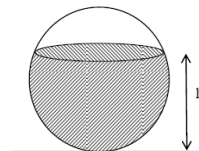
$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x , nel segmento parabolico delimitato dall'asse x . Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.



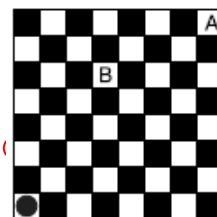
Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

3. Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h . Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V = \pi \cdot (rh^2 - \frac{h^3}{3})$.



4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?
5. Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2, -1, 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?
6. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:
 “Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ”.

7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelte casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



8. Data la funzione $f(x)$ definita in \mathbb{R} , $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1, 2e)$.
9. Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

10. Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty[$:

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t} dt$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa \sqrt{e} .

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

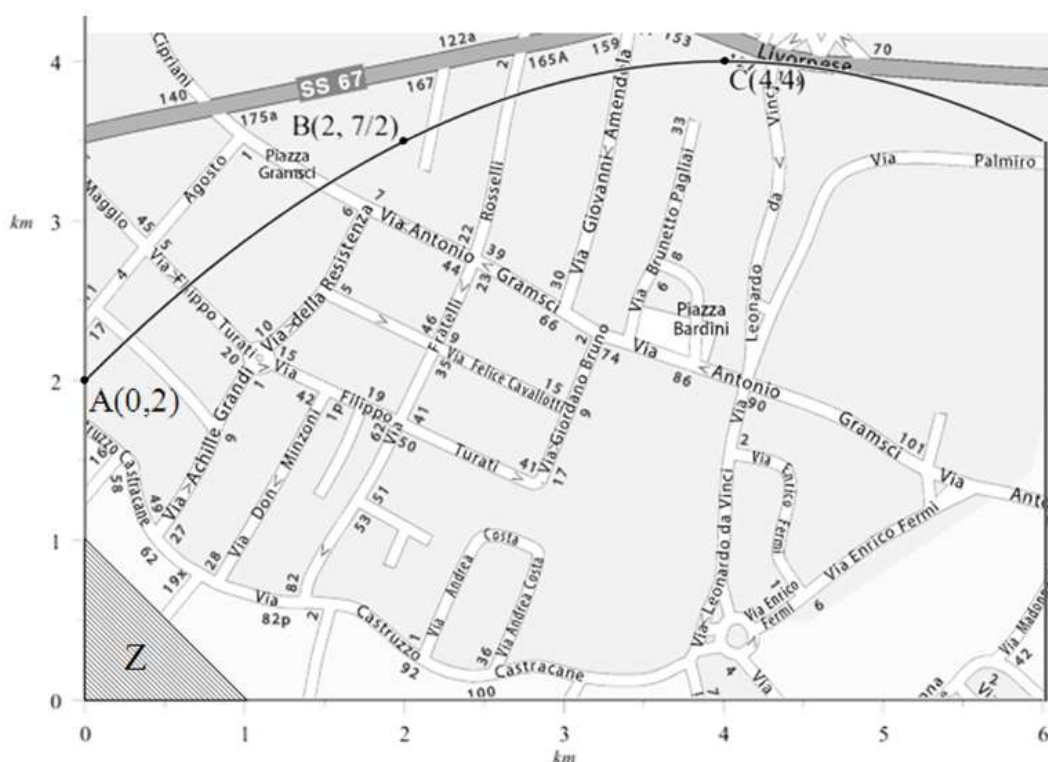


Figura 1



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A , B e C , dagli assi x e y , e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

- Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A , B e C . Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

- Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegate il significato nella situazione concreta.

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ , disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A , B , C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

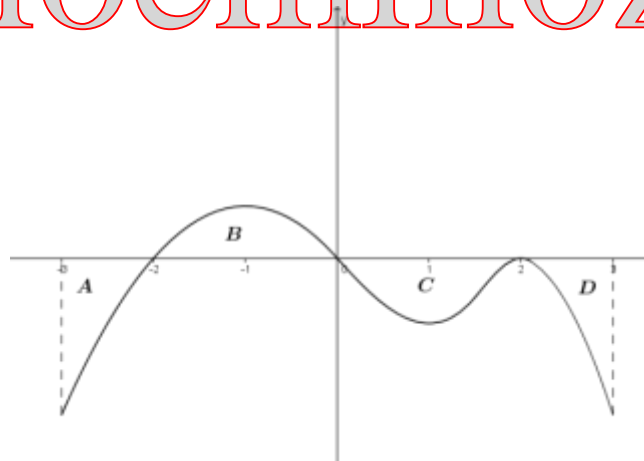


Figura 2

- Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
- Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
- Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
- Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^1 h(x) dx$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

QUESTIONARIO

- Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.
- Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

- Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?
- Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

- Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

- Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + (x - 4)^2 + (x - 5)^2,$$

determinare il minimo di f .

- Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r , verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \rightarrow \infty$.
- I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
- Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

- Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}, x \geq 0$) divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ e $D(1, 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.